Experiencias significativas en educación matemática

HENDEL YAKER, DAVID BENITEZ Y HENRY TAQUEZ (EDITORES)

Editorial Universidad Icesi
UNIVERSIDAD ICESI

Experiencias significativas en educación matemática

HENDEL YAKER, DAVID BENITEZ Y HENRY TAQUEZ (EDITORES)

Editorial Universidad Icesi

UNIVERSIDAD ICESI

Experiencias significativas en educación matemática

© HENDEL YAKER, DAVID BENITEZ Y HENRY TAQUEZ (EDITORES),
Y VARIOS AUTORES

Cali. Universidad Icesi, 2023.
364 pp. 17x24cm
ISBN: 978-628-7630-17-8 (PDF)
DOI: https://doi.org/10.18046/EUI/disc.4.2023

Palabras Clave: 1. Educación matemática | 2. Enseñanza de las matemáticas | 3. Experiencias significativas | 4. Pedagogía | 5. GeoGebra

Código Dewey: 510

© Universidad Icesi
Primera edición | Diciembre de 2021
Segunda edición | Octubre de 2023
Colección «Discernir»

Rector
Esteban Piedrahita Uribe

Secretaria General
María Cristina Navia Klemperer

Director Académico
José Hernando Bahamón Lozano

Coordinador Editorial
Adolfo A. Abadía

Diseño y Diagramación
Natalia Ayala Pacini | nataliaayalapb@gmail.com

Revisión de Estilo
Paola Vargas Heredia

Editorial Universidad Icesi
Calle 18 No. 122-135 (Pance), Cali – Colombia
Teléfono: +57 (2) 555 2334 | E-mail: editorial@icesi.edu.co
http://www.icesi.edu.co/editorial

Impreso en Colombia – *Printed in Colombia*

ÍNDICE

GeoGebra: mucho más que aprendizaje de las matemáticas

Las ideas consignadas en este libro toman especial relevancia en el marco del proyecto educativo institucional -PEI- de la Universidad icesi. Desde su nacimiento y posteriores y recientes desarrollos a lo largo de 25 años, hemos tenido especial interés en impulsar el aprendizaje de la matemática reconociendo su importancia en distintos sentidos y dimensiones: por una parte, sin duda, el valor disciplinar del saber matemático para distintas áreas del conocimiento y por otra, igualmente relevante, el valor de la matemática como lenguaje que ayuda a comprender y a traducir diferentes dimensiones de la realidad y, sobre todo, a desarrollar distintos tipos y elementos de pensamiento.

Por eso desde el Departamento de Matemáticas, integrado a la Escuela de Ciencias de la educación, propendemos por un aprendizaje que, desde las matemáticas, contribuya a que los estudiantes desarrollen distintas habilidades de orden superior como la proposición y resolución de problemas, la modelación matemática, la abstracción, la representación desde diferentes registros semióticos (identificación, tratamiento, conversión), todo ello apelando a distintas estrategias cognitivas (memoria, interpretación, análisis síntesis, etc.), metacognitivas (sentido, apropiación y valoración del propio aprendizaje) y, no menos importante atendiendo al sistema de creencias. Pocas veces un área del saber ha gozado de tantos problemas de aprendizaje y de tanto desprestigio como las matemáticas. Los sistemas de creencias afectan el desempeño de los alumnos y el nivel en el que logran el desarrollo de su proceso intelectual. Las investigaciones y acciones que los docentes consignan en este libro, dan cuenta de ello.

En todas estas dimensiones cognitivas, metacognitivas y valorativas el texto que tenemos entre manos hace aportes intresantes.

Es muy importante mencionar que estos desarrollos de investigación aplicada se dan en el marco de la alianza interinstitucional del Instituto GeoGebra en el que participan varias universidades de la región: Univalle, Javeriana, Antonio José Camacho, Autónoma e Icesi. Esto habla de la importancia del trabajo conjunto para avanzar en la superación estos problemas que aquejan el aprendizaje de la matemática. Los esfuerzos de este grupo de universidades, han trascendido las fronteras locales y, a través de distintos procesos formativos en el uso de GeoGebra, han llegado incluso a otros países y han promovido el aprendizaje entre pares de distintas latitudes.

El libro, desde distintas apuestas y perspectivas, nos invita a la reflexión sobre la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas haciendo uso enfocado, intencionado y pedagógico de las TIC, (GeoGebra en particular).

En un primer capítulo introductorio, los autores Benítez, Yaker y Táquez, además de compendiar los documentos que constituyen el libro, nos presentan importantes bases teóricas y metodológicas propicias para el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas en distintos niveles escolares.

Nos llaman la atención sobre asuntos clave en relación con el rol del educador como diseñador de ambientes de aprendizaje, sobre la atención a la dimensión semiótica de la enseñanza de las matemáticas, sobre la necesidad de trabajar perspectivas constructivistas y sobre cómo todo ello es posible si se hacen abordajes adecuados.

Hacen un nutrido recuento sobre distintos enfoques teórico-metodológicos y llama la atención la reconstrucción que hacen sobre la importancia de la resolución de problemas cómo vía principal para el aprendizaje de las matemáticas. Lo usan como herramienta heurística de primer nivel pues al centrarse en la resolución de problemas, lo que están haciendo es impulsar a través de la comprobación, la reflexión, la generalización, etcétera, las distintas formas de razonamiento que se van desarrollando en torno a dicho problema.

Otro asunto clave es que rescatan la fuerza que las preguntas tienen como recurso pedagógico para el saber matemático. Las preguntas tienen alcance cognitivo, metacognitivo y valorativo y contribuyen a la superación de las barreras para el aprendizaje y a la construcción de hipótesis como guía para resolver problemas.

En otra dimensión, se detienen en la importancia de las tecnologías digitales y destacan el valor de GeoGebra que permite a docentes y estudiantes relacionarse con distintos objetos y operaciones matemáticas en el marco de un proceso fenomenológico donde la interacción y el movimiento tienen un valor pedagógico fundamental. Todo esto privilegiando las aplicaciones en contextos reales.

El capítulo es el abrebocas perfecto para los capítulos siguientes que describen experiencias significativas del desarrollo de saberes matemáticos mediante GeoGebra en primaria, bachillerato y educación superior tanto en instituciones educativas públicas como privadas, muchas de ellas en contextos difíciles y vulnerables de la ciudad de Cali.

En el segundo capítulo se abordan experiencias de primaria. Son muy importantes porque es precisamente en esta edad cuando deben potenciarse todas las posibilidades para el máximo desarrollo de las habilidades matemáticas y minimizar los riesgos actitudinales.

Las investigaciones aplicadas se hicieron alrededor de diferentes grados, temas y objetivos de aprendizaje. Podemos leer con placer experiencias diversas que van desde problemas básicos de geometría, hasta la simetría axial. Es especialmente valioso ver apuestas pedagógicas sólidas, bien diseñadas, ajustadas a distintos grupos de edad y con aplicaciones prácticas a problemas acordes con la edad.

Más allá del valor de entender la importancia de la conjetura geométrica y las propiedades de los triángulos, es relevante comprobar cómo los estudiantes a través de estos procesos que los docentes proponen, exploran, manipulan material, comunican ideas, solucionan problemas y desarrollan estrategias de visualización.

Interesante también descubrir la reflexión de los profesores sobre sus propias transformaciones a lo largo de los proyectos.

Específicamente, la profesora Quiceno se detiene en la descripción del diseño metodológico que usó, su validación, recolección y análisis de los datos y da cuenta de la integración del proceso de investigación como vehículo para construcción del conocimiento matemático. Queda claro al leerla que, usando GeoGebra, logra en estudiantes de edades tempranas, el desarrollo de concepciones, percepciones y capacidades para conceptualizar, además del dominio específico del saber matemático que se propone. Así vemos como salta de la construcción de conjeturas en un contexto geométrico a entender cómo el proceso deriva en que los estudiantes conocen las leyes que rigen los triángulos, los visualizan, encuentran patrones, regularidades, invariancias y representan de manera visual, tabular y verbal. Estos son saberes que se transfieren, sin duda, a otras áreas del conocimiento.

En un segundo proyecto, los autores Plaza y Mosquera usan como excusa el diseño de un recipiente para crispetas para aprender geometría, específicamente enfocada en el análisis de los cuadriláteros. De nuevo, los estudiantes de una I.E. experimentaron cómo la geometría es excusa para el trabajo individual, la creatividad, la responsabilidad al mismo tiempo que aprendían a visualizar un ángulo o una superficie. Las autoras además usan pruebas de diagnóstico para dejarnos ver el nivel de conocimiento o desarrollo de la competencia antes y después de su proceso de trabajo y nos muestran cómo el uso del programa GeoGebra, facilita los aprendizajes a la vez que generan adhesión al saber matemático. Sin duda, el asunto contextual y creativo en relación con el recipiente de crispetas genera además interés y vinculación.

Cifuentes y Riascos nos presentan una experiencia didáctica en estudiantes de edades tempranas con escasa experiencia en uso de software. En esta investigación aplicada, usando la metáfora de "la fiesta de los monstruos", integraron habilidades de ciencias, matemáticas, artísticas y lenguaje para que mediara en la construcción de conocimientos.

Específicamente en matemáticas se interesaron por el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. Al tiempo que sus estudiantes aprendían a relacionar objetos, clasificarlos e interpretar y comparar sus propiedades, desde la perspectiva del arte los objetos geométricos se llenaban de color formas y texturas y desde el área de Ciencias esas formas se referían a la naturaleza. Así, integrando distintos saberes resolvieron problemas complejos que les implicó no solo el diseño integrado entre áreas sino el diseño de recursos y materiales y procesos de validación y análisis que van mucho más allá de la matemática.

En el tercer capítulo los autores nos presentan experiencias en educación matemática en el nivel de bachillerato. Este segmento reúne tres investigaciones: una centrada en el concepto de función y modelación, otra centrado en la generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico y otra concentrada en la función lineal.

En el primero, Marines, Córdoba y Marín abordan los conceptos de función y modelación anclados al pensamiento numérico, al razonamiento y resolución de problemas. Desarrollan las funciones mediante representación verbal, numérica, gráfica y algebraica usando ejemplos y aplicaciones al mundo real o contextualizado. De nuevo, la identificación de variables, el empleo de la función lineal y la representación y la tabulación se aprenden simultáneamente con habilidades para el aprendizaje individual y colectivo.

Enfrentarse a problemas concretos en esos contextos sencillos y claros, muestran el valor del uso del software para verificar cómo la inferencia, la explicación, el análisis, la síntesis y las conclusiones reinaron más allá de identificar los elementos básicos de la función y las variables dependientes e independientes. Los estudiantes comprendieron la intención de la modelación y la pusieron al servicio de la situación-problema y quedó claro que con el camino de la indagación se vence miedo al aprendizaje de las matemáticas.

En este mismo sentido, Betancourt y Rengifo, cuando se acercan a la generalización en contextos geométricos, lo que encuentran es el desarrollo de capacidades para identificar patrones y regularidades en los estudiantes. Así mostraron cómo enseñar a pensar algebraicamente es posible yendo más allá del uso de signos y letras y nos muestran con ejemplos ricos en experiencias de aprendizaje, las múltiples aristas desde las que se puede dar la enseñanza de las matemáticas con ayuda de GeoGebra.

Por su parte, Amu, Chocó y Escobar nos presentan su proyecto centrado en la función lineal. Señalan cómo los estudiantes usan la función lineal y cómo determinan la relación entre pendiente y rectas paralelas y perpendiculares, pero, sobre todo, dan cuenta del valor de la socialización para el aprendizaje cooperativo y de la construcción colectiva del conocimiento y del valor de la argumentación para construir ideas sólidas e hipótesis.

Finalmente, los capítulos 8 a 11 se detienen en experiencias de formación en educación superior en distintos contextos latinoamericanos. El capítulo 8, Freire, González y Quiroga se detienen en el uso de GeoGebra para formar maestros en matemática y usan la construcción de paralelogramos como eje de su experiencia educativa. Iidentificaron que al usar el recurso TIC mediante pruebas y análisis surgieron conflictos docentes que se resolvieron mediante trabajo colaborativo y generación de nuevas ideas y la expansión de GeoGebra a nuevos temas que no habían considerado.

García en el capítulo 9 calcula el área de un lago, usando el cálculo integral y pone a pruebas las competencias de modelación, comunicación y solución de problemas. Reconoce el papel mediador de GeoGebra no solo en las capacidades matemáticas, sino que pueden extrapolarse las laborales y ciudadanas. Además, contrasta el método de trabajo con el modelo pedagógico de la universidad Icesi y da cuenta de cómo estas estrategias son profundamente constructivistas.

En el capítulo 10, González y Soto dan solución a un problema de optimización en un curso de cálculo en el que los estudiantes usaron saberes previos y dieron cuenta de que a través de GeoGebra los estudiantes modelaron un problema mediante funciones y demostraron, en sus análisis, capacidad de solución de problemas y argumentación, entre otros.

Finalmente, el capítulo 11 las autoras Mosquera y Chavarría muestran como las hojas de trabajo diseñadas en contexto real y el uso de tecnología computacional involucraron a los estudiantes en la resolución de un problema que demandó una participación más activa de parte de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

El ambiente de aula que se propició en la investigación ayudó a los estudiantes a interactuar con la tecnología, a medir y tomar datos, procesarlos e interpretarlos, a utilizar diversas representaciones semióticas de la función lineal, a comunicar y a argumentar ideas.

Debo destacar que todos los proyectos describen los contextos, aplican pruebas diagnósticas, explican el diseño pedagógico y didáctico y dan las razones para ello, exponen claramente las metodologías, los resultados y las rutas de análisis, dan valor al material con el que se trabajó, explican en profundidad los resultados que obtuvieron y en todos ellos el uso del software GeoGebra fue el protagonista para mostrar no solo como logran impulsar el saber matemático y algebraico sino como ayuda a transformar la disposición para la enseñanza de la disciplina.

Agradezco la invitación a presentar el libro. Valoro enormemente el interés de estos docentes por hacer investigación en el aula sin, necesariamente tener experiencia en ello, y sobre todo exalto su compromiso con la transformación de la enseñanza de las matemáticas.

Por todo ello invito a leer el libro, a entender el valor pedagógico de GeoGebra en particular y de las TIC en general y a seguir construyendo más y mejores rutas para enseñar matemáticas y, sobre todo, para lograr que nuestros estudiantes tengan pasión por aprenderlas, tal como pretende nuestro proyecto educativo.

ANA LUCÍA PAZ
Decana escuela Ciencias de la Educación
Universidad Icesi

CAPÍTULO 1

Marcos teóricos y metodológicos para el desarrollo de la competencia de resolución de problemas con la mediación de tecnologías digitales

DAVID BENÍTEZ MOJICA
HENDEL YAKER AGUDELO
HENRY ARLEY TAQUEZ

RESUMEN

El presente capítulo tiene como propósito central presentar las bases teóricas y metodológicas de un programa de desarrollo profesional docente para profesores de matemáticas de diferentes niveles escolares, orientado al proceso de diseño de actividades de aprendizaje, fundamentado en la resolución de problemas y con la mediación de GeoGebra.

PALABRAS CLAVE

Desarrollo profesional docente, profesores de matemáticas, Resolución de problemas, GeoGebra

1. ALGUNOS ANTECEDENTES

En el 2015, con el objetivo de "contribuir al impulso de una educación de calidad en la ciudad y la región", nace en la Universidad ICESI la Escuela de Ciencias de la Educación (ECE). Uno de los grupos de investigación adscritos a la Escuela es IRTA, Investigación en Recursos y Teorías para el Aprendizaje, que desarrolla investigaciones en educación y pedagogía a través de varias líneas de acción, entre las que se incluye la Aplicación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) como apoyo al proceso de enseñanza aprendizaje, enmarcado en la propuesta de Metodología Activa: en *El Proyecto Educativo de la Universidad Icesi y el aprendizaje activo* se afirma que los tres elementos indispensables en cualquier estrategia de aprendizaje activo son: lograr el compromiso de los estudiantes, reconocer que existen diferentes estilos de aprendizaje y las buenas preguntas (González, 1998).

Con la promoción de actividades académicas en el ámbito de la Educación, la ECE apoya la participación de la Universidad en la creación del Instituto GeoGebra Cali (IG Cali), que recibe su aval como instituto local en 2016. El IG Cali brinda apoyo a las actividades de docencia e investigación en educación matemática en sus Instituciones Educativas del Nivel Superior[1]. Las actividades del IG Cali se enmarcan en la perspectiva metodológica de solución de problemas (Santos, 2008; Moreno, 1992; Santos y Benítez, 2003; Schoenfeld, 1985; Schoenfeld, 1992; Lanza y Schey, 2006; De Guzmán, 2007), donde la idea central, como propuesta didáctica, es promover en los estudiantes formas de pensar consistentes con el quehacer de la disciplina, comprometiéndolos en procesos de construcción matemática. La solución de problemas es, entonces, un método apropiado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo, haciendo énfasis en los procesos de pensamiento y de aprendizaje.

En 2018 se produce un acercamiento entre IRTA e IG Cali que pretende aunar esfuerzos para estudiar y proponer soluciones a un problema evidenciado en los datos empíricos que arroja el seguimiento que hace el IG Cali, desde su constitución en 2016, a los cursos de matemáticas de

---

1. Universidad Autónoma de Occidente, Universidad ICESI, Universidad Javeriana de Cali, Universidad del Valle y la Institución Universitaria Antonio José Camacho.

los ciclos básicos en las cinco instituciones universitarias: los diagnósticos de entrada para los estudiantes que toman este primer curso muestran que la mayoría de ellos ni siquiera tienen las destrezas operativas mínimas de aritmética y tampoco han incorporado registros básicos de representación, algebraicos o gráficos, que les permitan comunicarse en contextos matematizados. Pero también preocupa el impacto que tiene esta primera experiencia de matemáticas universitarias: los diagnósticos de salida para esos estudiantes (o los de entrada para el curso siguiente en la línea de prerrequisitos) arrojan básicamente los mismos resultados, a pesar de todo el proceso llevado a cabo durante el semestre.

De esta manera, surge el proyecto de investigación: solución de problemas con GeoGebra, cuyos objetivos principales son: i) formular una propuesta alternativa de diseño curricular para el primer curso de matemáticas de la Universidad ICESI y ii) proponer estrategias de desarrollo profesional docente donde se promueva el uso de TIC en el aula de clase.

Nuestro primer acuerdo es que las propuestas del Ministerio de Educación Nacional (MEN) como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) ofrecen unas perspectivas teóricas y metodológicas para la Educación Matemática nacional que, tal vez, no hayan sido suficientemente aprovechadas, y que tienden un puente natural para facilitar el proceso de transición de la educación media a la superior. El MEN plantea una estructura fundamental para la matemática escolar compuesta por conocimientos básicos, procesos de pensamiento matemático y contextos que den sentido a la actividad matemática del estudiante. Como estrategia metodológica, la educación por competencias le apunta a la adquisición del conocimiento mediante la acción, esto implica el reto curricular de la integración entre las diferentes áreas del conocimiento y, a la vez, demanda ambientes que doten de significado los aprendizajes: "Un ambiente de aprendizaje es un espacio estructurado en donde confluyen estudiantes y profesores que interactúan con la intención de que ocurran aprendizajes ofreciendo oportunidades para que los estudiantes construyan conceptos, desarrollen habilidades de pensamiento, valores y actitudes" (MEN, 2014, p. 17).

Las experiencias acumuladas de investigación de los dos grupos nos arrojan un panorama inicial donde es claro que las propuestas educativas actuales, presentes ya en la educación básica y media colombiana bajo la orientación de los *Lineamientos Curriculares*, incorporan estrategias basadas en el desarrollo de competencias y marcos conceptuales sobre diferentes niveles de uso y apropiación de las nuevas tecnologías.

Podemos resaltar algunos aspectos centrales de estas tendencias sobre los que parece existir acuerdo entre los especialistas que nos alertan sobre la importancia de buscar mecanismos concretos para atraer a los profesores hacia su consideración y estudio:

- Las nuevas tecnologías están afectando tanto la manera de investigar como los temas de investigación en Matemáticas. Necesariamente deben afectar, también, los diseños curriculares para la matemática escolar, incluidos los pregrados. La presencia de las tecnologías digitales en el aula producirá una serie de cambios en las decisiones que tome el profesor (contenidos, metodologías de trabajo, evaluación), y en los roles que desempeñe él y sus estudiantes dentro del aula de matemáticas.
- La nueva dinámica de producción y adquisición de conocimiento cambia el enfoque: la atención no debe centrarse en los contenidos, sino en los procesos centrales de pensamiento[2].
- El rol del educador se concibe como el de un diseñador de ambientes de aprendizaje que propone situaciones problema para promover el desarrollo del pensamiento matemático, valida la producción matemática de los estudiantes (tanto a nivel individual como en la negociación social de significados en el aula) y garantiza el adecuado manejo de valores humanos en todos los procesos de interacción implícitos en el contexto social de la escuela.
- Es fundamental concebir la matemática escolar esencialmente como una actividad y no como un producto terminado, y debe prestarse cuidadosa atención a la dimensión semiótica de esta actividad.

---

2. "(...) en nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos (...)" (De Guzmán, 2007, p. 27).

- Los profesores universitarios deben experimentar por sí mismos tanto las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías como las posibles "trampas" que tienden (Santos Trigo, 2019) para que puedan alcanzar la idoneidad necesaria en sus propuestas curriculares.

En el proyecto adoptamos una visión constructivista del conocimiento respaldada actualmente por varios investigadores, con planteamientos como los que nos permitimos resumir a continuación:

a. Lo esencial en la actividad del estudiante es la construcción de significados asociados a su propia experiencia, pero este proceso necesariamente debe socializarse "negociando significados" en la comunidad con la que interactúa, el salón de clase (Moreno, 1992).

b. Los problemas de aprendizaje matemático no pueden desligarse del contexto sociocultural específico del sujeto que aprende; es precisamente en el contexto donde se encuentran los sistemas de interpretación de las acciones de los estudiantes sobre los objetos matemáticos (D'amore, 2004).

c. La incorporación de las TIC en el ambiente escolar supone nuevas reflexiones sobre las relaciones didácticas en el proceso de construcción del conocimiento (Artigue, 2011).

d. El trabajo fue orientado por un equipo interdisciplinario de profesores expertos en enseñanza de las matemáticas, que están adscritos a las cinco universidades que respaldan el IG-Cali.

Ante el impacto de la revolución tecnológica y la necesidad de atender la dimensión semiótica de la actividad matemática, la reflexividad del profesor cobra mayor importancia en el ambiente de aprendizaje, dado el rol de constructor de la propuesta que se lleva inicialmente al aula; Josep Gascón (2011) plantea algunos tipos de problemas de orden epistemológico y problemas que consideramos del profesor, es decir, el tipo de problema que hace referencia a la transformación que sufre el "estudio de una cuestión matemática" cuando esta se propone para ser estudiada en una institución escolar. Por ello, las modificaciones y ajustes del programa curricular propuesto son decisiones didácticas del profesor que no son necesariamente ajenas a la representación de un saber matemático que se tiene en la institución escolar. De todos modos, gran parte de las decisiones del profesor se estructuran a partir de sus conocimientos disciplinares y de sus creencias.

Alan H. Schoenfeld (2019) comenta que, durante los casi cuarenta años entregados a la investigación en Educación Matemática, un poco más de una década la dedicó a la línea de Resolución de Problemas y las últimas tres décadas a modelar las prácticas de enseñanza; este investigador enfatiza en la necesidad de que la investigación y la práctica vivan en continua sinergia para que cada una de ellas mejore la otra.

Bajo este marco de referencia, y con el propósito de dar cumplimiento al segundo objetivo del proyecto: proponer estrategias de desarrollo profesional docente donde se promueva el uso de TIC en el aula de clase, nace el programa: *Diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje basados en la solución de problemas matemáticos y mediados con tecnologías*, dirigido por el IG Cali y soportado institucionalmente por el Centro de Recursos para el Aprendizaje (CREA) y el Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad ICESI.

2. REFERENTES TEÓRICOS

Una misión central de la Educación Matemática consiste en contribuir al desarrollo de las competencias matemáticas de los estudiantes.

El tema de las competencias ha tomado fuerza en el ámbito educativo desde que una de las figuras más destacadas de la Lingüística del Siglo XX, el profesor Noam Chomsky, lo introdujera por primera vez. Desde entonces, en el currículo de varios países del mundo han incorporado este concepto en todas las áreas educativas.

La palabra competencia tiene varios significados. El sentido en el que se entiende la palabra lo encontramos en el diccionario de la Real Academia Española de la Lengua: pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado.

Por otra parte, el concepto de competencia implica un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes, y otros elementos como la motivación y los valores. Es decir, la competencia apunta a la capacidad que desarrolla el individuo para poner en práctica de manera articulada *habilidades, conocimientos y actitudes* para enfrentar y resolver problemas.

Las competencias matemáticas que el MEN (2006) propone desarrollar en el nivel de bachillerato se pueden agrupar en las siguientes categorías que contienen las actividades centrales del pensamiento matemático: *el planteamiento y la resolución de problemas; la argumentación; la comunicación y la modelación matemática*.

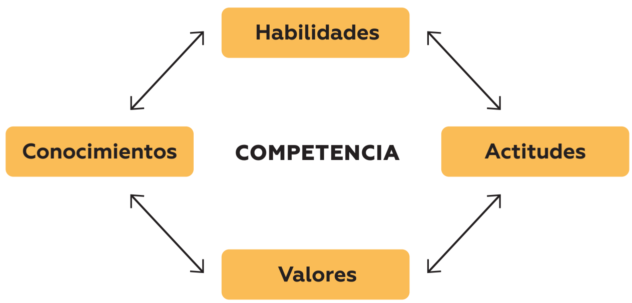
Un alumno logra desarrollar una competencia matemática específica cuando consigue el dominio de las siguientes dimensiones: *conocimientos, habilidades, actitudes y valores*.

2.1. El desarrollo de competencias matemáticas

A pesar de que el término competencia tiene diferentes interpretaciones y aplicaciones en Educación, en el presente escrito lo entenderemos como la capacidad que desarrolla un individuo para poner en práctica de manera articulada cuatro dimensiones: Conocimientos, Habilidades, Actitudes y Valores (Castellano et al., 2013).

Los conocimientos son todos los recursos que tiene el estudiante a su disposición, como una base amplia para utilizarlos en la actividad matemática. En esta dimensión se encuentra el manejo de términos no definidos, definiciones, postulados, propiedades algoritmos y teoremas.

FIGURA — 1
Dimensiones para el desarrollo de competencias



Fuente: elaboración propia (2021).

Las habilidades esta compuestas por dos familias de estrategias: las cognitivas y las metacognitivas. Las estrategias cognitivas constituyen líneas de acción en la actividad matemática como particularizar, generalizar, visualizar, estimar, encontrar patrones, formular conjeturas, encontrar contraejemplos, entre otras. Las estrategias meta cognitivas son todas las acciones o preguntas que se autoformule el estudiante para asegurar si entendió el enunciado del problema, si seleccionó los recursos y caminos de solución adecuados, si el camino de solución es correcto, si un paso específico está bien ejecutado, para encontrar y superar errores, para reflexionar sobre la calidad o la dificultad del camino de solución y para evaluar si lo encontrado soluciona o no el problema.

La actitud es la disposición que tenga el estudiante para enfrentar la actividad matemática. Es ampliamente reconocido que tal disposición hacia el estudio de las matemáticas es negativa. Hecho que genera desmotivación, apatía, reprobación y deserción escolar. En la investigación de la Educación Matemática y en enseñanza de las ciencias han sido estudiados diferentes factores que inciden en este tipo de actitudes de los estudiantes; factores culturales, afectivos, cognitivos, pedagógicos, didácticos. En el trabajo desarrollado por Benítez Mojica (2006) se reporta un estudio de investigación donde se construyen secuencias didácticas, actividades, materiales e instrumentos que mejoran la actitud de los estudiantes hacia el estudio de las matemáticas.

Los valores son principios éticos y morales sobre los que se fundamenta el accionar de todo individuo. En toda actividad humana dichos principios son impartes. En la educación que promueve el diplomado se pude ayudar a cimentar valores como la puntualidad, la tenacidad, la solidaridad, el respeto, la tolerancia, entre otros.

Finalmente, para desarrollar una competencia se deben cumplir dos condiciones: a) **la articulación**, es decir, las cuatro dimensiones se deben desarrollar juntas; b) **la acción**, ya que, además del manejo teórico de las cuatro dimensiones, los profesores participantes deben dinamizarlas en actividades concretas.

Las competencias que se desarrollaron en el diplomado son las siguientes: (i) resolver problemas, (ii) proponer problemas, (iii) comunicar ideas matemáticas, (iv) argumentar, (v) usar múltiples representaciones y (vi) modelar matemáticamente.

De todas estas competencias, tanto en el diplomado como en el presente artículo, se hace una discusión más profunda sobre la resolución de problemas de matemáticas.

2.2. Una discusión sobre la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas

A finales de los años setenta, en algunos países, particularmente en Estados Unidos, se llegó a la conclusión de que ni el enfoque de la enseñanza de las matemáticas con prioridad en las estructuras abstractas (Matemáticas Modernas) ni el retorno al dominio de herramientas algorítmicas (regreso a lo básico) habían satisfecho las expectativas relacionadas con el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Como consecuencia, la enseñanza de las matemáticas se orientó, en muchas naciones, hacia la resolución de problemas.

En países como Estados Unidos y Canadá el movimiento de reestructurar el estudio de las matemáticas recomienda, explícitamente, que la resolución de problemas matemáticos sea la actividad esencial en el estudio de la disciplina (Santos Trigo, 1992). En el aprendizaje no solo es necesario que los alumnos asimilen contenidos matemáticos, reglas y formulas, adicionalmente se deben desarrollar habilidades y estrategias que les permitan aplicarlas a situaciones de la vida cotidiana. Con esta intención han surgido grandes movimientos donde se han propuesto líneas generales sobre los fundamentos que deben aprender los estudiantes, las habilidades y las estrategias que deben desarrollar (NCTM, 2000).

En síntesis, el movimiento de la resolución de problemas surge a finales de la década de los setenta como rechazo a los movimientos denominados *la matemática moderna y el regreso a lo básico*. La mirada fue puesta de inmediato en los trabajos de Polya (1965).

2.2.1. El trabajo de Polya

En 1965 George Polya presentó un trabajo titulado *cómo plantear y resolver problemas*, el cual se transformó en un clásico. El libro se divide en cuatro secciones: *en el salón de clases, cómo resolver un problema: un diálogo, un breve diccionario de heurística y problemas, sugerencias y soluciones.*

Al comienzo del texto se propone un listado de preguntas y sugerencias para resolver problemas, y en las secciones se explica el propósito del listado; la manera cómo debe usarlo el maestro y la forma de actuar del alumno al resolver problemas. Asimismo, se definen todos los términos que contiene la lista y se hacen ejemplos de solución.

Polya (1965) considera la resolución de problemas como un proceso en el que se identifican las siguientes etapas: comprensión del problema, construcción y ejecución del plan, y una visión retrospectiva.

2.2.1.1 Comprensión del problema. En dicha etapa deben quedar esclarecidos los datos, las incógnitas y las condiciones del problema. Algunas preguntas que pueden ayudar en el entendimiento son: ¿cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

Las respuestas a tales interrogantes deben contribuir, significativamente, a la comprensión de los problemas que se tratan de resolver. En los *problemas por demostrar* las preguntas sufren una ligera variante: ¿cuáles son las hipótesis? ¿Cuál es la conclusión?

2.2.1.2. Construcción de un plan. Como segunda etapa se deben identificar las relaciones que existen entre los diversos elementos del problema, lo cual facilita explorar caminos viables de solución. En el proceso podrían resultar de mucha utilidad las estrategias heurísticas. Según Polya (1965), estas son estrategias generales que por sí mismas no garantizan éxito, pero resultan de gran ayuda cuando se utilizan.

Entre las estrategias que posibilitan trazar un plan se encuentran el considerar parte de la hipótesis, pensar en problemas conocidos, dividir un problema en subproblemas, formular el problema de forma diferente y usar diagramas para representar el problema en forma diferente.

Las heurísticas son presentadas en forma de sugerencias y preguntas para ser utilizadas en el aula por estudiantes y maestros al resolver problemas. Cuando el alumno piensa en las preguntas o sugerencias se derivan aspectos centrales del plan de solución, tales como las técnicas a utilizar, los métodos a seguir, etc.

En ocasiones no se sabe a qué estrategia recurrir o surgen varias opciones para atacar un problema. ¿De qué manera seleccionar la alternativa más viable?

2.2.1.3. Ejecución del plan. Una vez que se ha obtenido un plan es necesario materializarlo, es decir, realizar todas y cada una de las tareas propuestas en la fase anterior hasta obtener la solución.

2.2.1.4 Visión retrospectiva. Encontrar la solución no es el final del proceso. Cuando el resolutor supone que ha encontrado la respuesta del problema se inicia un nuevo proceso que incluye: verificar los resultados y los razonamientos, y explorar caminos más cortos y contundentes, así como aplicar el resultado obtenido en la solución de otro problema.

La descripción del proceso para encontrar la respuesta se plantea en términos de un resolutor ideal y se trata de describir conceptualmente las tareas "generales" que este realiza en cada una de las fases del proceso.

En la segunda sección del libro, *cómo plantear y resolver problemas*, se presenta un breve diálogo idealizado entre un maestro y un estudiante, donde el profesor responde a las preguntas del alumno sobre cómo proceder en cada etapa para la solución de un problema.

En la tercera sección se hace una extensa reflexión teórica sobre los términos que utiliza (heurística, problemas por demostrar, generalizar, etc.); se resuelven problemas, y se presentan ejemplos que le dan contexto al uso y al entendimiento de tales términos en la solución de problemas.

2.2.2. El trabajo de Mason, Burton y Stacey (1989)

Mason et al., (1989), en su trabajo sobre resolución de problemas, identifican un proceso en el que se distinguen tres fases importantes: el abordaje, el ataque y la revisión. Resulta interesante analizarla para reflexionar sobre la pregunta:

¿Qué indicios ofrece el proceso de resolución de un problema que sugiere reconsiderar modificaciones a la estrategia elegida?

En este trabajo se encuentra documentación relevante sobre procesos fundamentales del *pensamiento matemático*, como particularizar y conjeturar. En él se construye la idea de *monitor interior*, elemento importante para auto regular el proceso mismo de solución.

Por otra parte, existen similitudes entre el trabajo de los autores mencionados, líneas anteriores y la propuesta de Polya (1965); por ejemplo:

Las fases del proceso de solución de problemas. De acuerdo con Mason et al., (1989), en el abordaje se fusionan el *entendimiento* y el *trazo del plan* que perfila Polya (1965).

Las fases de la resolución de problemas son similares: *el ataque*, en Mason et al., (1989) se asemeja a la *ejecución* y la *revisión* (Mason et al., 1989) es igual a la *visión retrospectiva.*

Otra semejanza son las preguntas que, de acuerdo con Mason et al., (1989), dinamizan el proceso de solución: *¿qué sé? ¿qué quiero?* Y *¿qué puedo usar?* Que también aparecen en Polya (1965).

Para contestar la pregunta *¿qué sé?* (datos del problema), ambos autores sugieren leer cuidadosamente el problema y particularizar para iniciar la exploración del mismo.

Respecto a la interrogante *¿qué quiero?* Lo pertinente es clasificar la información.

En relación con la pregunta *¿qué puedo usar?* Los autores sugieren que se haga un listado de hechos, representaciones y teoremas que puedan resultar de utilidad para la solución del problema; se puede entender como un paso importante para el *trazo del plan* de solución.

Cuando no se sabe cómo iniciar un proceso de resolución, Mason et al., (1989) sugieren realizar, entre otras, las siguientes actividades:

a. Hacer un diagrama.

b. Seleccionar palabras desconocidas contenidas en la redacción del problema y buscar su significado en el contexto del problema.

c. Se pueden buscar casos particulares que ayuden a encontrar las respuestas a las preguntas: ¿qué sé?, ¿qué quiero?, y ¿qué puedo usar?

La fase de *ataque* de inicio cuando el resolutor siente que el problema "ya es suyo". De acuerdo con Mason et al. (1989), el ataque se inicia cuando el problema se *ha instalado* en la mente de quien lo va a resolver.

La fase de *revisión* involucra tres etapas: la comprobación, la reflexión y la generalización. La primera implica revisar los cálculos, verificar los razonamientos para analizar si las consecuencias son apropiadas y comprobar que la solución corresponda al problema planteado. Mason et al., (1989) exhortan a hacer una reflexión sobre los momentos clave de la solución. Por ejemplo, acerca de las implicaciones de las conjeturas y sobre la búsqueda de formas más eficientes para resolver el mismo problema en un contexto más amplio, extrapolando la solución hallada a nuevos dominios y a cambiar las condiciones del problema para plantear unos nuevos.

2.2.3. El trabajo se Schoenfeld (1985)

Schoenfeld (1985) reconoce el potencial de las estrategias discutidas por Polya (1965). Su trabajo ejerce un rol importante en la implementación de las actividades relacionadas con el proceso de resolver problemas en el aprendizaje de las matemáticas. Desde esta perspectiva, sugiere que en el salón de clase hay que generar condiciones similares a las que los matemáticos experimentan en el proceso de desarrollo de las matemáticas. A la vez, indica que los estudiantes necesitan aprender matemáticas en un salón de clase que represente un microcosmo de la cultura matemática.

Schoenfeld (1985) realizó varios estudios con los alumnos y matemáticos profesionales. En todos ellos encontró evidencias para afirmar que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolver problemas: estrategias cognitivas, dominio del conocimiento, estrategias metacognitivas y sistema de creencias.

2.2.3.1 Estrategias cognitivas. Las estrategias cognitivas son métodos heurísticos, tales como descomponer el problema en casos especiales, invertir el problema, establecer subtemas y relajar las condiciones, entre otras. Las heurísticas son acciones que pueden resultar de utilidad para resolver problemas, las cuales son consideradas como estrategias y técnicas para un avance en el proceso de solución. Polya (1965) hace alusión a las heurísticas por medio de preguntas y sugerencias que realiza un resolutor ideal; a continuación, se presentan algunas de ellas:

- ¿Puedes pensar en un problema análogo, un tanto más accesible?
- ¿Puedes enunciar el problema en forma diferente?
- ¿De qué manera se pueden cambiar los datos o las condiciones en las que está redactado el problema?

Santos (1992) señala que las estrategias generales de resolución de problemas toman algunas características específicas del contexto en el que se usan. En particular, presenta tres ejemplos donde se ilustra que la estrategia de seleccionar casos especiales tiene formas particulares, dependiendo del contexto del problema (algebra, geometría o cálculo).

Algunas de las familias de estrategias heurísticas que estudiamos en el diplomado fueron las siguientes: particularizar, generalizar, hacer un diagrama, visualizar, encontrar patrones, conjeturar , formular contraejemplos, abordar el problema de atrás hacia adelante, descomponer el problema en subproblemas y quitar una condición del problema

2.2.3.2 Dominio de conocimiento. Una cualidad relevante en el desempeño de un resolutor exitoso de problemas es el desarrollo de una base amplia de conocimientos de matemáticas.

En esta dimensión se estudian los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante para la resolución de un problema. Aquí se pueden elaborar preguntas que sirven de base para esclarecer las características de la dimensión: ¿cuáles son las herramientas que tiene un resolutor a su disposición? ¿Qué información relevante tiene a mano para resolver la situación problemática? ¿Cómo accede a esa información y cómo la utiliza?

Schoenfeld (1992) presenta un amplio rango de recursos que pueden contribuir a la resolución de problemas en un dominio matemático particular: El conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema, El conocimiento de hechos y definiciones, La habilidad para ejecutar procedimientos algorítmicos, El conocimiento de postulados, El manejo de teoremas y corolarios.

En cuanto a las familias de recursos que estudiamos en el diplomado, tenemos las siguientes: Términos no definidos, Definiciones, Postulados, Teoremas, Corolarios y Algoritmos.

2.2.3.3 Estrategias metacognitivas. En el curso de una actividad intelectual el análisis de la marcha del proceso desempeña un papel central. El monitoreo y el control del progreso de la solución son componentes de la metacognición. Este tipo de estrategias se refieren a las decisiones globales respecto a la selección e implementación de recursos y estrategias; también incluye acciones como planear, evaluar y decidir.

La realización de una tarea en matemáticas depende no solamente de los recursos disponibles, sino también de la manera de usar tales conocimientos y la eficiencia con la que se apliquen, es decir, la utilidad que se da a la información potencial a disposición del resolutor. Las denominadas estrategias metacognitivas constituyen un monitoreo del proceso y coadyuvan a tomar decisiones en momentos clave: la selección de las estrategias, el cambio de dirección, cuando sea necesario.

Schoenfeld (1992) reporta que quienes tienen mucha experiencia en la solución de problemas de matemáticas (expertos) dedican prácticamente la mitad del tiempo de solución a entender y buscarle el sentido al problema. También destaca que, permanente, dichas personas revisan lo que están haciendo, y en la parte final verifican la respuesta. Por su parte, los estudiantes no le dedican tanto tiempo a entender, sino más bien a poner en práctica una estrategia de solución. Ellos no cambian la estrategia, pese a que los resultados del proceso sean poco prometedores. A diferencia de los expertos, los alumnos en su mayoría no tienen la costumbre de revisar las respuestas de los problemas.

Cuando se toman malas decisiones sobre la selección de estrategias y recursos es inminente el fracaso, a no ser que se apliquen correctivos a tiempo. Cuando los recursos se escogen cuidadosamente y se explotan o abandonan de manera adecuada, como resultado de un control riguroso, es posible llegar con éxito a la solución. Sin embargo, el problema es evaluar o darse cuenta de si la decisión es mala o no. De esa manera, el control sobre las decisiones y las tareas de ejecución en el proceso de solución de un problema no se rezaga al final, es un ejercicio permanente de evaluación. Desconocer este punto garantiza el fracaso, en tanto que aplicarlo sistemáticamente contribuye de manera eficaz a la construcción de la solución.

Mason et al., (1989) crean la idea del monitor interior que se encarga de hacer preguntas, dar consejos, vigilar el buen desempeño en el proceso de solución y tomar los correctivos necesarios.

En el diplomado se analizó el papel central que desempeñan las estrategias de control para: entender el enunciado del problema, seleccionar recursos útiles en el proceso de solución, encontrar errores en el proceso de solución, discutir si lo encontrado soluciona el problema, y buscar caminos más cortos y elegantes.

2.2.3.4. Sistema de creencias. Generalmente, los estudiantes tienen un conjunto de creencias acerca de lo que significa hacer matemáticas y sus objetos específicos. Es conveniente hacer la siguiente reflexión: ¿cómo afectan tales creencias el desempeño de los alumnos en la resolución de problemas? En esta dimensión se ubican las creencias que el individuo tiene de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como aborda una persona el problema, por ejemplo, las técnicas que emplea o evita, el tiempo que le dedica al estudio. De lo anterior, se puede afirmar que "las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control" (Schoenfeld, 1985, p. 45).

Comúnmente, las matemáticas son asociadas con altos niveles de dificultad, cuya práctica se limita a personas con coeficientes intelectuales elevados. También son relacionadas con la certeza, la exactitud, la memoria y la abstracción. Tales supuestos culturales son modelados por la experiencia escolar que hace a los alumnos construir sus propias concepciones, generalmente distorsionadas, sobre el que hacer matemático. En este contexto, Schoenfeld (1985) reporta creencias típicas de los estudiantes y algunas de sus posibles consecuencias:

- **Creencia 1.** Los problemas de matemáticas siempre se resuelven en menos de 10 minutos, si ellos tienen solución.

- **Consecuencia**. Si los alumnos no pueden resolver un problema en 10 minutos se rinden.

- **Creencia 2.** Únicamente los genios son capaces de descubrir o crear las matemáticas.

- **Consecuencia.** Si un estudiante típico se olvida de algo está en dificultades. Después de todo, no es un genio y no podrá deducirlo solo.

Algunas creencias son generadas a partir de las prácticas matemáticas escolares. En este proceso desempeñan un rol decisivo las ideas que los profesores tienen de las matemáticas porque estas modelan las actividades que se realizan en el salón de clases. Sobre el particular, Santos (1993) asegura:

> Los profesores de matemáticas enseñan esta disciplina de acuerdo con ciertas ideas que ellos tienen acerca de las matemáticas y como éstas deben ser aprendidas por los estudiantes. Por ejemplo, un profesor puede pensar que el aspecto formal es el ingrediente principal de esta disciplina. Como consecuencia, en el contenido presentado a los estudiantes existe un gran énfasis en las demostraciones.

Otro profesor puede creer que las matemáticas finalmente se reducen a un conjunto de fórmulas o algoritmos que los alumnos tienen que aprender a aplicar en varias situaciones. (p. 419).

Al profundizar en las creencias típicas de alumnos sobre las matemáticas, Schoenfeld (1985) aplicó un cuestionario con 70 preguntas cerradas y 11 abiertas a 230 estudiantes de los grados 10 a 12, inscritos en un curso tradicional de geometría plana. Los estudiantes pertenecían a tres preparatorias con altos índices de ingreso a la universidad. El instrumento contiene cuatro partes:

- Las atribuciones de éxito o fracaso de los estudiantes.
- Las percepciones de los alumnos sobre las matemáticas y la práctica escolar.
- Las apreciaciones comparativas de las matemáticas con otras disciplinas.
- El desempeño personal en matemáticas y la motivación.

Schoenfeld (1985) reporta la relación entre las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas y su desempeño en la materia. Del estudio emergen los siguientes resultados:

- En general, los alumnos consideran que es el trabajo y no la buena suerte lo que cuenta para obtener buenas calificaciones, y ponen mucho más énfasis en el trabajo que en el talento inherente.
- De las respuestas escritas y de las observaciones de clase se puede concluir que como consecuencia de la práctica escolar los alumnos le dan prioridad a la memorización para el aprendizaje de las matemáticas.
- Los alumnos consideran que una práctica escolar cotidiana es el uso de los ejercicios para adiestrarse en pequeñas partes de la materia.
- En general, los alumnos manifestaron dedicarle, aproximadamente, diez minutos a la solución de un problema antes de darse por vencidos.
- Se encontró una correlación positiva entre el desempeño académico de los estudiantes en matemáticas y las percepciones de su propio desempeño.

En síntesis, lo que una persona piensa acerca de las matemáticas determina la forma de seleccionar una dirección para resolver un problema. Al respecto, existe una estricta relación entre las creencias que los estudiantes tienen sobre la disciplina y las experiencias que han vivido en el aula.

La caracterización de las matemáticas en términos de la resolución de problemas permite ver el aprendizaje desde un enfoque dinámico. Por ejemplo, Santos (1993) señala que una caracterización de las matemáticas, en términos de la resolución de problemas, cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos y procedimientos que el estudiante debe aprender de memoria. En contraposición, los estudiantes, bajo este enfoque, están activos haciendo preguntas, transformando el problema, debatiendo, conjeturando y formulando contraejemplos.

En otros términos: el enfoque de la resolución de problemas ve a las matemáticas como un objeto de aprendizaje en el que los estudiantes se desenvuelven en un ambiente similar al de los matemáticos profesionales.

2.2.4. Comparación de los modelos de Polya, Mason y Schoenfeld

Polya (1965) documenta su experiencia como matemático y como profesor. En su trabajo hace una caracterización de la manera como se resuelven problemas matemáticos, es decir, utiliza el método de introspección. Es importante mencionar que muchos matemáticos se identifican y reconocen la relevancia de los aportes de Polya, ya que describe a detalle lo que un experto exhibe en el proceso de resolver problemas.

En primera instancia, se podría pensar que el modelo de resolución de problemas propuesto por Polya (1965) es aplicable a la solución de problemas de cualquier tipo. Sin embargo, Schoenfeld (1985) y Santos (1992) presentan evidencias donde una estrategia heurística puede tener subestrategias con formas superficiales distintas, dependiendo del contexto del problema.

Las observaciones que se le hacen al trabajo de Polya están referidas al resolutor ideal (experto) que ha desarrollado estrategias y formas de pensar que le permiten superar obstáculos que aparecen en el proceso de resolución, desde la fase de entendimiento hasta la de revisión del mismo proceso. En el mismo sentido, el trabajo de Mason, et al., (1989) representa una extensión al trabajo de Polya (1965) y presenta un marco o modelo de resolución de problemas más descriptivo que el que propone Polya, además incluye elementos directamente ligados con el quehacer didáctico. Sin embargo, no existe un trabajo experimental que lo respalda. Por otro lado, el trabajo de Schoenfeld, que inicialmente se fundamentó en las ideas de Polya, incluye un programa de investigación donde se incluye la implementación sistemática de distintas estrategias de resolución de problemas en el salón de clases. Es decir, incluye una componente empírica donde observaron y analizaron los comportamientos de los estudiantes y expertos en la resolución de distintos tipos de problemas.

Otro aspecto importante en la discusión de los tres modelos de resolución de problemas es la necesidad de reajustar las premisas fundamentales asociadas con cada uno de los modelos en términos del empleo de la tecnología en la resolución de problemas por parte de los estudiantes.

En conclusión, existen diferencias importantes entre el trabajo de Schoenfeld (1985), Mason et al., (1989) y Polya (1965).

Un elemento metodológico destacado del trabajo de Schoenfeld (1985) es que documenta las diferencias importantes entre el trabajo de los expertos y los estudiantes de matemáticas.

Existen intersecciones en los modelos:

a. Como se puede ver en la siguiente tabla, las fases del proceso de solución de problemas, en el modelo de Polya (1965) y Mason et al., (1989), son similares (ver tabla 3).

b. El monitor interior de Mason et al., (1989) y la dimensión de las estrategias metacognitivas de Schoenfeld (año) tienen funciones similares:

- Darse el tiempo necesario para entender el problema. Cuando el resolutor no comprende suficientemente el enunciado no es prudente iniciar la solución.
- Darse cuenta cuando se ha perdido el camino hacia la solución. De ser así, el resolutor debe regresar hasta terrenos conocidos. Si fuera necesario, deberá leer nuevamente la redacción del problema.
- Revisar permanentemente los cálculos algebraicos, los cálculos aritméticos, la elaboración de gráficas y su interpretación.

TABLA —— 3
Comparación de los modelos de Polya (1965) y Mason et al., (1989)

MODELO DE POLYA	MODELO DE MASON
Entendimiento y construcción de un plan ¿Cuáles son los datos? ¿Cuáles son las incógnitas? ¿Bajo qué condiciones está construido el problema?	**Abordaje** ¿Qué sé? ¿Qué quiero? ¿Qué puedo usar?
Ejecución	Ataque
Visión retrospectiva	Revisión

Fuente: Benítez (2006).

- Examinar la efectividad de las estrategias empleadas. Cuando una estrategia no ayuda en la solución del problema se debe seleccionar y usar una nueva.
- Revisar la solución completa. Cuando el resolutor tenga una posible solución debe llevar a cabo una revisión del trabajo que incluya los siguientes aspectos: evaluar el cumplimiento de las exigencias del problema, buscar posibles errores en el procesamiento numérico, grafico o algebraico de la información, detectar argumentaciones débiles, y encontrar recursos y estrategias útiles para resolver el problema que podrá aplicar en situaciones similares.

Un aspecto clave en la *revisión* es proponer nuevos problemas. Una vez que el resolutor piense que terminó, el ciclo se activa nuevamente; surgen nuevos problemas o nuevas situaciones donde se puedan aplicar las enseñanzas del problema actual.

Schoenfeld (1987, citado por Santos, 1997) sugiere algunas actividades que pueden servir al desarrollo de habilidades metacognitivas:

- *Mostrar videos de estudiantes resolviendo problemas*. La finalidad es discutir las debilidades y las destrezas que exhiban durante la solución.

- *Actuar como moderador mientras los estudiantes resuelven un problema.* La reflexión se va generando de las ideas que los estudiantes exponen para solucionar un problema; proponen recursos y discuten sobre una estrategia. A la vez, algunas actividades que realiza el profesor son: acotar y resaltar los elementos importantes que van resultando en el debate, plantear preguntas, hacer sugerencias, mediar en la discusión y hacer aclaraciones.
- *Resolver un problema en pequeños grupos.* Hay alumnos que son sobresalientes en la resolución de problemas y que pueden enseñarles mucho a sus compañeros. El papel del profesor, en estos casos, es hacer preguntas y plantear sugerencias que ayuden al grupo a reflexionar acerca de lo que están haciendo.

2.3. Las tecnologías digitales y la resolución de problemas de matemáticas

El Tercer Handbook Internacional de Educación Matemática resalta que esta disciplina está cambiando muy rápidamente, y que las tecnologías digitales constituyen un factor importante que influyen en la velocidad y profundidad de estos cambios. Varios de los trabajos presentados en esta obra reflexionan sobre la influencia que ha tenido la tecnología en la enseñanza, el aprendizaje, la evaluación y la elaboración de material.

El uso de la tecnología se ha convertido en factor prioritario para la toma de decisiones sobre planes de estudio y estrategias didácticas (Benítez, 2006). Las herramientas tecnológicas ofrecen potencial para comprometer a los estudiantes en la discusión de ideas matemáticas significativas.

A nivel nacional han existido programas de incorporación impulsados desde el MEN y el Min-Tic como, por ejemplo, el uso de calculadoras en educación matemática, tabletas para educar y Computadores para Educar. En el ámbito local se impulsó el programa TIT@: educación digital para todos, impulsado por la Secretaría de Educación de Cali. El objetivo de este programa es fortalecer a los niños, niñas y jóvenes, docentes y directivos docentes de Cali en competencias del Siglo XXI: el bilingüismo, el uso de las tecnologías digitales, la investigación, el emprendimiento, la comunicación y el pensamiento crítico. Todos estos programas han desempeñado un papel muy importante. Por ejemplo, han logrado dotar de infraestructura a las instituciones educativas, empero, no han sido sostenibles en el tiempo y no han logrado dejar una formación sólida en los profesores para un uso sistemático que promueva el desarrollo de los procesos centrales del pensamiento matemático.

El uso de la tecnología, en actividades de aprendizaje, tiene ya una historia de más de 30 años. Sin embargo, su incorporación sistemática a los sistemas escolares ha sido mucho más reciente y aún más lo han sido los estudios y evaluaciones que dan cuenta de los resultados de ese proceso. Desde esta perspectiva, es pertinente emprender trabajos de investigación que documenten los efectos que genera el empleo de la tecnología en la resolución de problemas de matemáticas.

En el desarrollo del Diplomado se ha incorporado el uso de las herramientas tecnológicas para promover el desarrollo de procesos matemáticos: comunicar ideas matemáticas, conjeturar, representar y formular contraejemplos.

Heid (1997) describe cuatro principios sobre el uso de tecnología. Uno de ellos establece que se debe dar a los estudiantes la oportunidad de tener experiencias similares a las de los matemáticos profesionales, y señala que los micromundos computacionales son *avenidas para la actividad matemática real*, pues estimulan el desarrollo de una postura investigativa para la indagación matemática. Un micromundo es un sistema computacional dotado de una fenomenología. Un sistema es una terna compuesta por objetos matemáticos, operaciones y relaciones. La fenomenología es el conjunto de fenómenos que ocurren en la pantalla de un computador.

GeoGebra es un Ambiente de Geometría dinámica que está caracterizado como un micromundo computacional:

a. **Objetos:** en GeoGebra hay diferentes clases de objetos matemáticos como números, polígonos, funciones, matrices, polinomios, entre otros.

b. **Operaciones:** en GeoGebra se pueden realizar prácticamente todo tipo de operaciones matemáticas como operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación, potenciación, radicación, logaritmación), operaciones con funciones (adición, sustracción, composición, límite, derivada, integrales), operaciones con matrices, transformaciones del plano, entre otras.

c. **Fenomenología:** en la pantalla GeoGebra ocurren varios fenómenos como: arrastre, movimiento, medidas, la traza, el lugar geométrico y las macroconstrucciones.

En la experiencia de resolver problemas con la ayuda de GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar diferentes niveles de argumentación que incluyen:

a. El reconocimiento visual: con la visualización los estudiantes pueden observar que tres puntos están alineados o que dos rectas concurren.

b. La prueba del arrastre: los estudiantes modifican los objetos primitivos de la construcción para verificar si la propiedad visualizada en la fase anterior es verdadera o no. La prueba de arrastre también puede ser aplicada para acotar el dominio geométrico, donde se cumple una propiedad.

c. La verificación de propiedades: una vez que se induce una ley, los alumnos pueden usar el software de geometría dinámica para preguntar si dos rectas son paralelas o si un punto pertenece a un lugar geométrico.

d. La macroconstrucción: los estudiantes pueden construir funciones computacionales en el entorno GeoGebra, donde la variable independiente es el objeto inicial y la variable dependiente es el objeto final. De esta manera, cada vez que se le aplique la función al mismo objeto inicial el programa genera el mismo objeto final.

e. La prueba con lápiz y papel: después de inducir y darle seguimiento a una conjetura, los estudiantes deben hacer una demostración usando lápiz y papel.

3. EL DISEÑO METODOLÓGICO

El diplomado promueve principalmente el empleo de GeoGebra, un software de geometría dinámica de acceso libre en la web[3], que brinda la posibilidad de generar simultáneamente, para un mismo objeto matemático, su representación algebraica y su representación gráfica, a la vez que permite al usuario experimentar con la variación de coordenadas (visualización y reconocimiento de estructuras) y generar tablas de da-

3. Para conocer más, pueden dirigirse al siguiente enlace: www.GeoGebra.org

tos dinámicas (visualización y reconocimiento de leyes de covariación). Este software le exige al usuario comunicarse en lenguaje matemático, invitándolo a ensayar y poner en juego sus intuiciones (actitud que han incorporado naturalmente nuestros jóvenes por su cotidiana exposición a los dispositivos electrónicos). Para el experto en la disciplina (el profesor), GeoGebra no solo le permite dinamizar su propia formación, sino que le ofrece un laboratorio completo con el que puede aprender a diseñar experiencias de aprendizaje que se actualicen constantemente, y con el que puede desarrollar experticia en la formulación de "buenas preguntas" que movilicen a los estudiantes hacia su formación autónoma[4].

El Instituto Internacional GeoGebra (IGI) es una enorme comunidad académica que se define como "...una organización sin ánimo de lucro que proporciona software libre de matemáticas dinámicas...fomenta y promueve la colaboración entre profesionales e investigadores, buscando establecer comunidades de usuarios autosuficientes". El IG Cali está reconocido por el IGI desde febrero de 2016 como uno de sus afiliados regionales, con sede en Colombia, que tiene el aval para desarrollar actividades en el ámbito educativo, mediadas por el empleo del software GeoGebra, con el propósito de enriquecer y cualificar la enseñanza de las matemáticas en nuestro medio. Este Instituto tiene una agenda permanente de trabajo que comprende jornadas de capacitación en el uso del software para profesores de todos los niveles educativos, apoyo a la investigación en educación matemática en sus sedes institucionales y en colaboración con distintas Instituciones Educativas (IE) de la ciudad y sus alrededores, promoción y apoyo para el uso de TIC a través de un seminario permanente, y de la colaboración institucional con programas de educación continua.

El trabajo de observación implícito en las actividades del IG Cali ha permitido evidenciar la gran resistencia de nuestros profesores de matemáticas tanto a incorporar nuevas tecnologías en sus clases como a salir del modelo tradicional de explicación-ejemplos-talleres-evaluación por imitación; bajo este modelo lo normal es acudir al rigor del lenguaje

---

4. La comunidad GeoGebra publica regularmente tutoriales de apoyo para los diferentes tipos de usuarios del programa. Para los lectores de este libro que apenas estén iniciando su incursión en este mundo digital les recomendamos: https://www.geogebra.org/m/MqVqGRux

formal y emplear la mediación de libros de texto comerciales. Por otro lado, las dinámicas administrativas en las IE implican el manejo de ciertos indicadores que garanticen las acreditaciones de calidad y las condiciones mínimas de funcionamiento. Las demandas de estos indicadores, principalmente en las IE de básica y media, afectan necesariamente el normal desarrollo de los proyectos educativos. Un efecto directo de este tipo de presiones aparece en la sobrecarga de trabajo de escritorio para los profesores que deben emplear una parte considerable de su tiempo en el registro de evidencias de sus trabajos en clase y en la escritura de numerosos informes. No menos importante es la presión constante de las evaluaciones internacionales y de Estado que han provocado (es un secreto a voces) la práctica generalizada de emplear los tiempos de clase en el entrenamiento de los estudiantes para las pruebas estandarizadas, con criterios netamente técnicos sobre la tipología de las pruebas, en busca de mejores resultados en las calificaciones.

Estos aspectos considerados se conjugan en nuestro medio produciendo, por lo menos, dos efectos negativos:

1. Se estimula el aprendizaje por repetición. El estudiante enfrentado a un sistema de códigos que le descargan en los libros de texto y en las explicaciones de clase, y que él no logra traducir apropiadamente, toma la decisión de memorizar procedimientos y algoritmos para pasar la evaluación, porque sabe que las preguntas con las que será examinado son imitación de los ejemplos y ejercicios propuestos por el profesor y por los textos.
2. Se desestimula el desarrollo de la autonomía intelectual. El estudiante se habitúa a recibir las explicaciones de los procedimientos “paso a paso” para enfrentar tareas sobre situaciones hipotéticas a las que, generalmente, no les encuentra ningún sentido.

Estas condiciones presentes en nuestro sistema educativo explican en gran medida el bajo nivel de desempeño en matemáticas de nuestros jóvenes bachilleres, primero porque el aprendizaje no se da si el que aprende no siente la necesidad de comprometerse con su proceso; además, lo que se aprende por repetición, si no tiene aplicabilidad necesaria, simplemente se olvida y no genera ningún tipo de adaptación estructural en nuestra facultad de pensamiento.

REFLEXIONES FINALES

Se puso en marcha un programa de formación permanente de profesores, el cual tuvo varias características que se describen en la presente sección.

El primer principio básico de acción es la renovación de práctica docentes. El conocimiento de las matemáticas y del pensamiento matemático son condiciones necesarias para lograr ese objetivo, pero no son suficientes. El profesor debe implementar procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación que promuevan mayor participación de los estudiantes en el proceso de construcción de conocimientos.

El eje central de la reflexión fue la promoción del desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático en la población escolar como particularizar, encontrar patrones, conjeturar, comunicar, argumentar.

El programa de diplomado está orientado a profesores de matemáticas y de áreas afines como la física y la ingeniería. Se trabajó con profesores de matemáticas de diferentes niveles escolares. Esta integración resultó importante para entender problemas de enseñanza, para reflexionar sobre el currículo, para buscar estrategias comunes e integración en el gremio de profesores.

Se estudiaron las competencias que se impulsan en la matemática escolar de diferentes países. En este sentido, se reflexionó sobre procesos como: resolver problemas, proponer problemas, comunicar ideas, argumentar, representar y modelar. La competencia a la que se le dedicó mayor tiempo y esfuerzo fue a la de resolver problemas, por ser un elemento clave en los objetivos del diplomado.

Se diseñaron actividades o tareas de aprendizaje en tres contextos: real, realista y formal. Entendiendo los primeros como actividades de aplicación de las matemáticas a otras áreas como la física, la química, la biología, la economía, la medicina y donde las matemáticas desempeñan un papel importante para su solución. Las actividades realistas o hipotéticas son aquellas que se formulan en contextos cercanos a la realidad porque se le restan variables o porque el contexto o los datos son invenciones. El contexto formal o puramente matemático contiene abstracciones sin aplicación alguna.

El uso de tecnologías digitales tuvo un papel central en todo el programa. En este sentido, se discutió sobre los enfoques teóricos y metodológicos de su implementación. También se dieron talleres de manejo sobre cada una de las vistas de GeoGebra, para que los profesores tuvieran mejor dominio instrumental para resolver problemas, dictar clase con apoyo de esta herramienta y para diseñar actividades de aprendizaje.

El diseño de tareas es otro elemento central en este programa, de esta manera, los profesores tuvieron oportunidad de implementar los aprendizajes adquiridos en el diplomado para diseñar tareas con la mediación de GeoGebra, validarlas, implementarlas en uno de sus cursos. Adicionalmente, documentaron la intervención didáctica escribiendo la experiencia en un formato específico y participaron como ponentes en eventos nacionales e internacionales.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. (2011). Tecnología y Enseñanza de las Matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 13-33.

BENÍTEZ MOJICA, D. (2006). Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes en la resolución de problemas con apoyo de la tecnología computacional [Tesis Doctoral] (Cinvestav, Ed.) México.

CASTELLANO TORRES, N., Morga Rodríguez, L. E. y Castellano Torres, A. (2013). *EDUCACIÓN POR COMPETENCIAS: HACIA LA EXCELENCIA EN LA FORMACIÓN SUPERIOR*. Red Tercer Milenio.

CLEMENTS, M. B.-K.-S. (Ed.). (2013). *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer.

D'AMORE, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 90-106.

DE GUZMÁN, M. (2007). Enseñanaza de las ciencias y la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 43*(1), 19-58.

GASCÓN, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa., 14*(2), 203-231.

GONZÁLEZ, H. (1998). *El proyecto Educativo de la Universidad Icesi y el aprendizaje activo.* Universidad Icesi.

HEID, K. (1997). The technological revolution and the reform of school mathematics. *American Journal of education, 106*, 5-56.

LANZA, P. y Schey, I. (2006). Matemática en el Primer Ciclo. *Todos pueden aprender Lengua y Matemática*. Asociación Civil-Unicef-Fundación Noble; Grupo Clarín.

MASON, J., Burton, L. y Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente.* Labor.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (MEN). (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (MEN). (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN. (MEN). (2014). *Foro Educativo Nacional. Ciudadanos Matemáticamente Competentes.* .

MORENO, L. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática, 4*(2), 7-15.

NCTM. (2000). *Principles and standars for school Mathematics.* Reston.

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* Trillas.

SANTOS TRIGO, M. (1992). La resolución de problemas: el trabajo del Alan Schoenfeld, una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática, 2*(2), 16-24.

SANTOS TRIGO, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Iberoamérica.

SANTOS TRIGO, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl y M. Santos Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving: Current Themes, Trends, and Research* (pp. 63-89). Cham. doi:10.1007/978-3-030-10472-6_4

SANTOS, M. (2008). La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, L. Blanco (Eds), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 159-192). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

SANTOS, M. y Benítez, D. (2003). Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas. *Perfiles educativos*, *25*(100), 23-41.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics.* D. Grows.

SCHOENFELD, A. (2019). What Makes for Powerful Classrooms, and How Can We Support Teachers in Creating Them? A story of research and practice, productively interwined. En G. K. (Ed.), *Compendium for Early Career Researchers in Mathematics Education* (pp. 495-510). https://doi.org/10.1007/978-3-030-15636-7_26

CAPÍTULO 2: EXPERIENCIAS SIGNIFICATIVAS EN PRIMARIA

El presente capítulo está compuesto por tres trabajos de investigación en el área de la Educación matemática, en el nivel de primaria, con la mediación de tecnologías digitales.

El objetivo del primer trabajo es describir el proceso de construcción de conjeturas geométricas que construyen los estudiantes de cuarto año de primaria de una institución pública de la ciudad de Cali-Colombia. El proyecto se realizó en un ambiente de solución de problemas de matemáticas, donde se promueve el uso de software dinámico y material manipulativo como papel, reglas, tijeras, colores y pegamento. En el trabajo se analizaron tanto las actividades de aprendizaje como el rol del profesor y las estrategias utilizadas por los estudiantes que los llevaron a la formulación de una conjetura geométrica sobre propiedades de los triángulos. Los resultados revelaron que los estudiantes a edad temprana pueden formular conjeturas geométricas en un ambiente de aprendizaje que promueve su participación activa mediante la exploración con instrumentos de mediación como el software GeoGebra, el material manipulativo, la comunicación de ideas tanto de manera escrita como de manera verbal, y la solución de ejercicios y problemas.

En el segundo trabajo se describe la experiencia que tuvieron los estudiantes del grado tercero de un colegio del sector privado de la Ciudad de Cali-Colombia, quienes realizaron un proyecto denominado “promotores de cine Berch”. Este fue un proyecto planeado para los dos primeros períodos del año lectivo 2019-2020, en el cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de participar en aspectos propios de la logística para el montaje de una función de cine. Dentro de dichos aspectos estuvieron: la venta y compra de productos, venta y compra de las boletas de entrada; marcar la silletería de la sala vs la boletería, difusión e invitación de la película; y la elaboración del diseño de las cajas para las crispetas, este último aspecto se constituyó en la actividad central del proyecto, permitiendo el diseño de un ambiente de aprendizaje enmarcado en la utilización de GeoGebra, programa a través del cual los estudiantes, en un principio, exploraron, identificaron, verificaron y reconocieron las propiedades geométricas de los cuadriláteros como el paralelogramo cuadrado y el trapecio isósceles, realizando la construcción de dichas figuras geométricas, siendo finalmente empleadas en la elaboración del diseño del recipiente.

El capítulo II del presente libro se cierra con una experiencia didáctica en el área de matemáticas para estudiantes de grado tercero del sector oficial de la Ciudad de Cali. Se diseño e implementó un proyecto que combina actividades de geometría, tecnología, artística y convivencia. Las actividades se desarrollan con la mediación del software de GeoGebra y de material manipulativo, para construir propiedades geométricas.

EQUIPO EDITORIAL

EXPERIENCIA 1

Estudio sobre la resolución de problemas de geometría con estudiantes de cuarto grado de primaria, empleando GeoGebra y material manipulativo

EDILMA QUICENO MESA

RESUMEN

El objetivo es documentar los tipos de conjeturas geométricas que construyen los estudiantes de cuarto año de primaria de la IE Técnica de Comercio Simón Rodríguez de la ciudad de Cali, en un ambiente de solución de problemas donde se promueve el uso de software dinámico y material manipulativo. En el trabajo se analizaron tanto las actividades de aprendizaje como el rol del profesor y las estrategias utilizadas por los estudiantes que los llevaron a la formulación de una conjetura geométrica sobre propiedades de los triángulos. Los resultados revelaron que los estudiantes a edad temprana pueden formular conjeturas geométricas en un ambiente de aprendizaje que promueve su participación activa, mediante la exploración con instrumentos de mediación como el software GeoGebra, el material manipulativo, la comunicación de ideas por las vías oral y escrita, y la solución de ejercicios y problemas.

¿EN DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO Y LAS CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN?

El proyecto se desarrolló en la IE Técnica de Comercio Simón Rodríguez, de Cali, la cual cuenta con tres sedes: dos de primaria, que funcionan en las jornadas de la mañana y la tarde, y la de bachillerato, que labora en las tres jornadas (mañana, tarde y noche). En la jornada nocturna se implementa el programa de alfabetización para adultos. Es una institución de carácter oficial con modalidad comercial que fundamenta su modelo pedagógico en el constructivismo y en la pedagogía activa.

El trabajo que aquí se reporta se realizó en la sede María Panesso, en la jornada de la tarde, la cual está ubicada en el barrio El Sena, de la Comuna 5 de la ciudad de Cali. En esta sede estudian los alumnos de los grados tercero a quinto de la básica primaria. La investigación se realizó durante el tercer y cuarto periodo del año lectivo 2019.

La comunidad escolar que participó en este estudio estuvo conformada por los estudiantes del grado cuarto de básica primaria de dicha institución, en la jornada de la tarde. El grupo era mixto, con edades que oscilaban entre los 9 y los 13 años. Estos estudiantes presentaban un nivel medio de reprobación y de deserción escolar. De otra parte, el grupo objetivo tenía un nivel básico en el uso de computadores y bases mínimas de Geometría; además, carecían de alguna fundamentación sobre el uso del software GeoGebra.

Respecto al contexto familiar, el 59,2 % de los alumnos conviven con familias disfuncionales, el 39,5 % de ellos forman parte de familias tradicionales, mientras que el 1,3 % corresponde a familias desplazadas.

El 60,8 % de los estudiantes habitan en viviendas o apartamentos propios y el 39,2 % viven en casas o apartamentos alquilados. Los estudiantes, en su mayoría, están cerca de la institución, en las comunas 4 y 5 de Cali, que corresponden a los estratos socioeconómico 3 y 4, es decir, gran parte de las familias tiene un empleo u otra fuente de ingresos permanente que les posibilita un nivel de vida cómodo. Las viviendas están construidas en material y cuentan con los servicios básicos de agua potable, energía, gas natural domiciliario e internet.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

En el presente artículo se reportan los resultados de investigación de un proceso de innovación didáctica en básica primaria. Este trabajo se enmarca en el área de desarrollo del pensamiento geométrico. Específicamente, se reportan los tipos de conjeturas geométricas que construyen los estudiantes de cuarto año de primaria de la IE Técnica de Comercio Simón Rodríguez de la ciudad de Cali, en un ambiente de solución de problemas donde se promueve el uso de GeoGebra y material manipulativo, como un estuche de geometría, tijeras, lápiz y papel.

En el trabajo se analizaron tanto las actividades de aprendizaje como el rol del profesor y las estrategias utilizadas por los estudiantes que los llevaron a la formulación de una conjetura geométrica sobre propiedades de los triángulos. Los resultados indicaron que los estudiantes a edad temprana pueden formular conjeturas geométricas en un ambiente de aprendizaje que promueve su participación activa a través de la exploración –utilizando instrumentos de mediación como el software GeoGebra y material manipulativo– y la comunicación de ideas por las vías oral y escrita mediante la solución de ejercicios y problemas.

El artículo tiene como propósito central documentar una implementación didáctica concreta en la que el profesor desarrolla un ambiente de aula e implementa una metodología que le permitió a los estudiantes participar de manera activa en la construcción de conjeturas.

Generalmente, la construcción de conjeturas se desarrolla en el ámbito universitario, por ello, es importante demostrar que este proceso central del pensamiento matemático es posible iniciarlo a edades más tempranas. Sin embargo, los estudiantes del nivel básico experimentan dificultades a la hora de resolver problemas de matemáticas. De ahí, que este trabajo se enmarque en un proyecto de investigación que tiene como propósito contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas en estudiantes de Educación Básica.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

El proyecto se estructuró en dos partes: supuestos teóricos y diseño metodológico.

Supuestos teóricos

Los supuestos teóricos –resolución de problemas de matemáticas, tecnología digital en educación matemática y material manipulativo– que sirvieron de soporte a la investigación se describen de manera concreta a continuación.

Resolución de problemas. Schoenfeld (1985) realizó varios estudios con los alumnos y matemáticos profesionales. En todos ellos encontró evidencias para afirmar que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas: (a) estrategias cognitivas, (b) dominio del conocimiento, (c) estrategias metacognitivas y (d) sistema de creencias.

Estrategias cognitivas. Son métodos heurísticos, tales como descomponer el problema en casos especiales, invertir el problema, establecer subtemas y relajar las condiciones, entre otras. Las heurísticas son acciones que pueden ser de utilidad para resolver problemas. Son consideradas estrategias y técnicas para un avance en el proceso de solución. Polya (1965) plantea solución a las heurísticas por medio de preguntas y sugerencias que realiza un resolutor ideal. Las siguientes son algunas de ellas: ¿pueden pensar en un problema análogo un tanto más accesible?, ¿pueden enunciar el problema en forma diferente?, ¿de qué manera se pueden cambiar los datos o las condiciones en las que está redactado el problema?

Dominio del conocimiento. Una cualidad relevante en el desempeño de un resolutor exitoso de problemas es el desarrollo de una base amplia de conocimientos de matemáticas. En esta dimensión se estudian los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante para la resolución de un problema. Aquí se pueden elaborar preguntas que sirven de base para esclarecer las características de la dimensión: ¿cuáles son las herramientas que tiene un resolutor a su disposición?, ¿qué información relevante tiene a mano para resolver la situación problemática?, ¿cómo accede a esa información y cómo la utiliza?

Estrategias metacognitivas. En el curso de una actividad intelectual, el análisis de la marcha del proceso desempeña un papel central. El monitoreo y el control del progreso de la solución son componentes de la metacognición. Este tipo de estrategias se refieren a las decisiones globales respecto al entendimiento del problema y a la selección e implementación de recursos y estrategias; también incluye acciones como planear, evaluar y decidir.

Sistema de creencias. Generalmente, los estudiantes tienen un conjunto de creencias acerca de lo que significa hacer matemáticas y sus objetos específicos. Es conveniente hacer la siguiente reflexión: ¿cómo afectan tales creencias el desempeño de los alumnos en la resolución de problemas? En esta dimensión se ubican las creencias de que el individuo tiene de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera cómo aborda una persona el problema; por ejemplo, las técnicas que emplea o evita y el tiempo que le dedica al estudio. De lo anterior se puede afirmar que "las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control" (Schoenfeld, 1985, p. 45).

Tecnologías digitales en educación matemática

El uso de la tecnología en actividades de aprendizaje tiene ya una historia de más de treinta años. Sin embargo, su incorporación a los sistemas escolares es mucho más reciente y aún más lo son los estudios y evaluaciones que dan cuenta de los resultados de ese proceso. Desde esta perspectiva es pertinente emprender trabajos de investigación que documenten los efectos que genera el empleo de la tecnología en la resolución de problemas de matemáticas y en la construcción de conjeturas.

En muchas actividades humanas utilizamos instrumentos tecnológicos: un celular con aplicaciones que nos orientan en el tráfico de una ciudad, una tableta para buscar información o un computador para resolver un problema. Los instrumentos que utilizamos en cada caso para lograr mediación cognitiva no solo han aumentado nuestra capacidad cognitiva, sino que la han reestructurado. En síntesis, los instrumentos amplifican el dominio de recursos y habilidades, y nos ayudan a resolver los problemas de manera diferente a la utilizada en el universo del lápiz y el papel.

A través de dichos instrumentos podemos conocer maneras que no eran posibles en ausencia de ellos. Por ejemplo, un biólogo que utiliza un microscopio electrónico tiene acceso a un nivel de observaciones y de conocimiento que le era inaccesible sin el instrumento. Algo similar ocurre con el telescopio del astrónomo y con el computador del matemático que construye conjeturas con el apoyo de este instrumento. Desde esta perspectiva, la construcción de conocimiento está mediada por el instrumento tecnológico.

Se tienen indicios para pensar que cuando se trabaja con la ayuda de las herramientas tecnológicas en la solución de un problema de matemáticas, algunas componentes del pensamiento matemático se ejecutan de manera distinta de cuando el problema se resuelve únicamente con lápiz y papel. En la experiencia de resolver problemas con la ayuda de GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar procesos del pensamiento geométrico para particularizar, visualizar, construir patrones, conjeturas y contraejemplos, a través de varias acciones como el trazo de objetos geométricos, la prueba del arrastre, la medición, el lugar geométrico y la utilización de diferentes registros de representación. Según Duval (1999),

GeoGebra es un software de Geometría Dinámica interactivo libre, como un micromundo computacional. Esto quiere decir que este instrumento de mediación tiene un conjunto de objetos con relaciones que permite realizar operaciones y contiene una serie de fenómenos como el arrastre, el movimiento, los lugares geométricos, el uso de diversas representaciones semióticas y la realización de macroconstrucciones. Con este instrumento de mediación se pueden ejecutar varias acciones cognitivas, como visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación.

Visualización. El ambiente de geometría dinámica les permite a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades, visualizarlas y transformarlas. Dicho proceso contribuye a desarrollar el hábito de transformar los casos particulares para buscar visualmente las variantes e invariantes de la construcción y la justificación formal de las conjeturas.

Experimentación. Además de la visualización, el software dinámico ayuda a los estudiantes a experimentar por medio de la construcción de casos particulares, para explorar casos adversos y situaciones extremas. En dichos ejemplos, los alumnos pueden medir, comparar y hacer trazos auxiliares. La información obtenida en la experimentación puede ayudar a construir conjeturas.

Sorpresa. Una actividad que puede resultar significativa para acompañar la investigación, es pedirles a los estudiantes que hagan predicciones sobre el resultado de cierto fenómeno que están a punto de abordar. Al realizar dichas predicciones, se hacen explícitas varias de ellas, las cuales permiten que los alumnos: (a) expresen sus predicciones con claridad, (b) tengan cuidado al construir sus propias predicciones, y (c) creen expectativas y motivaciones para la experimentación real. En la experimentación, los estudiantes pueden encontrar situaciones que contradigan sus predicciones.

Retroalimentación. La sorpresa descrita en líneas anteriores puede entenderse como una retroalimentación, en la que los alumnos pueden diferenciar entre una expectativa de cierta acción y el resultado de esa acción. En esta fase pueden aparecer nuevas predicciones y se abre la necesidad de hacer una demostración formal.

Material manipulativo

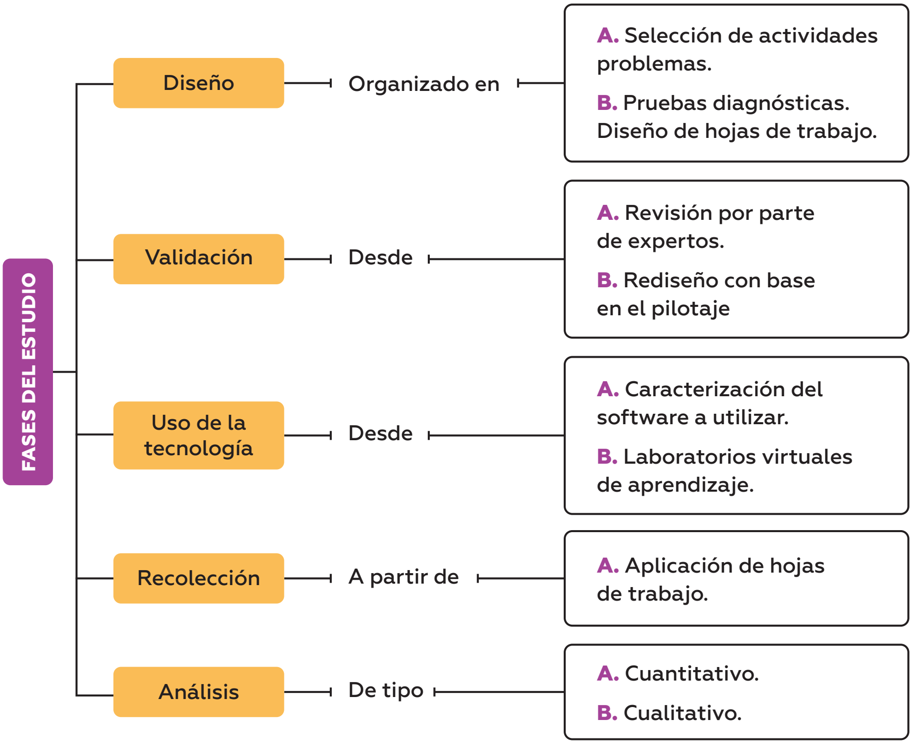
Los materiales manipulativos matemáticos, según Bartolini Bussi y Martignone (2014), son artefactos empleados en la educación matemática, que pueden ser utilizados por las manos de los estudiantes para explorar, adquirir o investigar conceptos o procesos matemáticos y realizar tareas o actividades de resolución de problemas, fundamentándose en evidencia perceptual (visual, táctil o, más generalmente, sensorial).

El uso de los materiales manipulativos, como estuches de geometría (regla, compás y escuadras), tijeras, papel y colores, les permite a los estudiantes realizar actividades concretas en el aprendizaje de la geometría como, por ejemplo, trazar, dibujar, colorear, visualizar, recortar, pegar o medir. Todas estas actividades generan la posibilidad de que el estudiante tenga una experiencia perceptual concreta y tangible. Estas experiencias iniciales se pueden convertir en insumos para la construcción de conjeturas.

Diseño metodológico

En esta sección se exponen los pasos que se siguieron durante el desarrollo de la investigación en las diferentes fases: diseño, validación, uso de tecnología, recolección y análisis de resultados. Las fases implementadas fueron las sugeridas en la tesis doctoral de Benítez (2006). Las actividades importantes en cada fase se presentan de forma sintética en la Figura 1. Más adelante se hace una descripción particularizada de cada actividad.

FIGURA — 1
Fases del estudio



Fuente: elaboración propia (2020).

Diseño. En esta fase se exponen dos momentos: el primero alude a la selección de actividades o problemas, los cuales serán estructurados a la luz de los estándares básicos de competencia en matemática propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017), para el grado cuarto de primaria de la Educación Básica con observancia de diversos autores. Lo anterior posibilita el diseño del test de entrada y las hojas de trabajo, lo que se consolida en un segundo momento.

Validación. *Una* vez diseñados el test de entrada y las hojas de trabajo, se presentaron las siguientes instancias: (a) la revisión del director y el codirector del proyecto de trabajo de grado, y (b) la identificación de docentes que tuvieran conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC, en la resolución de problemas matemáticos y en la construcción de conjeturas. Los anteriores pasos se realizaron con el fin de mejorar y elaborar hojas de trabajo que dieran cuenta de la investigación objeto de estudio.

Uso de tecnología. Consiste en exponer a los estudiantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra, siguiendo a Benítez (2006). En esta fase se implementaron las siguientes acciones: (a) una descripción global del software, y (b) un taller de manejo del mismo, usando la vista gráfica y la hoja de cálculo para la solución de problemas relacionados con algunas de las propiedades del triángulo.

- Descripción global del software: se mostraron las características más importantes de GeoGebra, las funciones, los comandos principales y la forma de operarlos con relación a la vista gráfica y la hoja de cálculo.
- Taller de manejo del software: se implementó con los estudiantes un taller de una hora con el objetivo de que resolvieran una serie de actividades sobre el manejo básico de cada herramienta de GeoGebra. El profesor estuvo pendiente de las inquietudes que los estudiantes pudieron tener en el proceso.

Recolección. Se utilizaron las hojas de trabajo como instrumento de recolección, el cual abarcaba diferentes preguntas con un espacio suficiente para que los estudiantes comunicaran sus ideas por escrito. En este taller se evidenció la capacidad que ellos tienen para conjeturar, a pesar de su corta edad. Algunos de los cuestionamientos estuvieron basados en un contexto realista o hipotético. Cabe mencionar que la propuesta de trabajo se abordó tanto de manera individual como colectiva.

Durante la puesta en escena de las hojas de trabajo sobresalieron tres etapas: (a) trabajo individual, (b) acompañamiento del docente investigador y (c) reformulación de contextos.

- *Trabajo individual*: en esta etapa, el estudiante se confronta al problema de manera individual con apoyo del docente o de otro par.
- *Acompañamiento del docente investigador*: en esta etapa, la intervención del maestro es para formular cuestionamientos y brindar sugerencias que permitan al estudiante aproximarse a la solución del problema.
- *Reformulación de contextos*: este espacio le brinda la oportunidad al estudiante a enfrentarse a problemas parecidos, pero en diferentes contextos, es decir, que sea capaz de sostener un vínculo con el problema original, pero aumentando algunas características que le posibiliten explorar nuevos dominios.

Fase de procesamiento. Después de haber recogido la información, se procedió a archivarla de forma física y electrónica. Se realizaron archivos con las hojas de trabajo. Las actividades fueron clasificadas en carpetas, las cuales se marcaron con el título de la hoja de trabajo y la fecha de aplicación. De igual manera, se conservaron, nombraron y guardaron los archivos electrónicos elaborados por los estudiantes en los portátiles, con ayuda del software de GeoGebra, además de fotografías y videos. Una vez guardados los archivos, se procedió a elaborar las tablas y las gráficas, según las categorías de análisis. En lo cuantitativo, se emplearon las siguientes categorías: correcto, incorrecto y no contestó. Esta última no se caracterizó debido a que todos los estudiantes contestaron cada una de las preguntas. En relación con lo cualitativo, se utilizaron las categorías de acuerdo con el tipo de recursos y estrategias utilizadas por los estudiantes participantes.

Análisis de resultados. Una vez recogida la información, se procedió a analizarla, con base en los desarrollos cualitativos y cuantitativos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, fue posible entregar la respuesta a las preguntas planteadas en la investigación, las cuales marcaron el derrotero para la realización del trabajo. Por otro lado, se pudo evaluar el impacto de las actividades propuestas a los participantes en el salón de clase.

Esta fase del estudio se efectuó con base en los referentes planteados en los capítulos 1 y 2 del trabajo de investigación, con lo que se esperaba constatar que, en el marco de la resolución de problemas, el uso de material manipulativo y de tecnología digital desempeñan un papel preponderante al interior del aula de clase, puesto que posibilitan el progreso de la capacidad del estudiante para construir conjeturas.

¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

Para la ejecución del proyecto, en el ámbito de la resolución de problemas, se utilizaron dos clases de materiales: (a) el software GeoGebra y (b) los materiales manipulativos matemáticos, tales como la regla y el compás.

GeoGebra es un software libre y gratuito, creado por Hohenwarter et al., (2008), que combina la geometría y la estructura de los sistemas algebraicos, lo cual permite potenciar conceptos matemáticos desde los primeros años de escuela hasta los grados universitarios, si se desea. Este programa le permitió al docente, durante la investigación, producir cualquier tipo de actividad o tarea para introducir un concepto matemático e institucionalizarlo.

De otro lado, le brindó al alumno herramientas de tipo geométrico, algebraico y propias del cálculo, para explorar y comprender propiedades fundamentales de los objetos matemáticos, y poder pasar de una representación a otra de un mismo concepto, lo que lleva, según Duval (1999), a comprender realmente la estructura de los elementos matemáticos involucrados.

¿QUÉ RESULTADOS SE OBTUVIERON?

La línea base

En esta sección se describen las características de un estudio diagnóstico y se presentan los principales resultados.

La línea de base se establece a partir de la aplicación inicial a los estudiantes del grado cuarto de primaria, de un test de entrada que consta de cuatro páginas, dos hojas y diez preguntas mixtas, de estas, siete eran de carácter abierto y las otras tres de selección múltiple (Anexo A), las cuales se compilaron en los siguientes grupos de análisis:

- **Concepciones:** las primeras siete preguntas indagaron sobre las concepciones que tuvieron los alumnos sobre ángulo llano, triángulo, ángulos internos y externos de un triángulo.
- **Percepción:** la pregunta 8 comprendía la percepción que tuvieron los alumnos sobre el tamaño, la forma y la posición de un triángulo alrededor de la propiedad de la suma de la medida de los ángulos internos de esta figura. Lo que se pretendía con este interrogante era examinar el impacto que tienen el tamaño, la forma y la posición en la toma de decisiones para la resolución de problemas de geometría.
- **Manejo de recursos:** las preguntas 9 y 10 correspondían al grupo de cuestionamientos relacionados con algunas de las propiedades de los triángulos, a saber: (a) propiedad de la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo, (b) propiedad de la suma de la medida de los ángulos externos de un triángulo, y (c) propiedad de la suma de la medida de dos ángulos internos de un triángulo con relación a un ángulo externo no adyacente a ellos. En este bloque de preguntas se trataba de analizar si los alumnos conocían o no estas propiedades.

Objetivos

- Analizar los conceptos que tienen los alumnos alrededor del triángulo y algunos de sus elementos **(Conceptualización).**
- Estudiar el impacto que tiene la percepción (tamaño, forma y posición) en relación con la toma de decisiones geométricas, en la resolución de problemas de geometría respecto a la construcción de conjeturas geométricas **(Percepción).**
- Explorar el conocimiento inicial que tienen los alumnos de grado cuarto de primaria acerca de algunas de las propiedades de los ángulos en un triángulo **(Uso de recursos, según Schoenfeld).**

Condiciones de la aplicación

El test de entrada, que sirvió de línea de base para esta investigación, contó con la participación de 28 estudiantes (13 mujeres y 15 hombres). Este instrumento se aplicó por escrito y de forma individual; para contestarlo, los estudiantes estuvieron bajo las siguientes condiciones:

El diagnóstico se aplicó a los 28 estudiantes del grado cuarto de primaria participantes del estudio en la IE Técnica de Comercio Simón Rodríguez, sede María Panesso, en la jornada de la tarde, en la ciudad de Cali.

Antes de entregar el test de entrada, la docente dio las explicaciones correspondientes para diligenciarlo. Luego, les solicitó a todos los estudiantes que se sentaran en sillas individuales. Posteriormente, la profesora verificó que todos los estudiantes tuvieran a mano un lapicero de color negro para resolver el test. En ese momento, para que los estudiantes resolvieran el test de entrada, la docente procedió a leer en voz alta las indicaciones que estaban detalladas en la parte inicial del mismo: (a) *Lee y entiende cada punto antes de responder, (b) usa lapicero para responder el test, (c) no borres ni taches las respuestas, y (d) la profesora le indicará cuándo puede pasar a resolver cada punto.*

Más adelante, la docente leyó en voz alta cada una de las preguntas hasta terminar los diez ítems planteados en el test, dando un tiempo prudente para que todos los estudiantes alcanzaran a responder. Finalmente, la docente les informó que, al terminar de contestar los diez ítems, verificaran si escribieron el nombre y contestaron cada pegunta. Inmediatamente, pasó por cada puesto recogiendo los test. Los estudiantes emplearon un tiempo de 40 minutos para contestar el test de entrada.

El trabajo se fundamentó en que los estudiantes construyeran las conjeturas sobre algunas de las propiedades de los triángulos, estas son: (a) la suma de los ángulos internos de los triángulos, (b) la suma de los ángulos externos de los triángulos, y (c) la suma de dos ángulos internos y uno externo no adyacente a ellos. Para efectos de este artículo y por calidad de la extensión, solo se abordará la primera propiedad citada.

Resultados de la hoja de trabajo 1 (suma de ángulos internos de un triángulo)

La actividad de la hoja de trabajo 1 se aplicó el 11 de septiembre de 2019; esta permitió que los alumnos pudieran establecer la relación entre los ángulos interiores de un triángulo. Dicha hoja de trabajo constaba de ocho actividades (Anexo B), las cuales estaban planteadas en el siguiente orden:

- Con el apoyo del software dinámico de GeoGebra dibuja el triángulo ABC.

- Mide los ángulos internos del triángulo ABC que dibujaste.
- Mueve los vértices del triángulo para completar la tabla de la hoja de cálculo del software, y en el cuaderno suma los ángulos internos del triángulo.
- Según los resultados de la tabla, escribe un párrafo sobre la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo.
- Utilización de material manipulativo para la construcción de dos triángulos de diferentes tamaños y el trazado de los ángulos internos del mismo con el uso de regla y compás.
- Escritura de lo observado al comparar la medida de la suma de los ángulos internos de los dos triángulos de distinto tamaño.
- Socialización de los resultados con el docente y los pares.
- Institucionalización de resultados.

Objetivos de la hoja de trabajo

Analizar el manejo de recursos que emplean los estudiantes del grado cuarto de primaria en el proceso de construcción de conjeturas en un contexto geométrico.

Analizar el impacto que tiene el empleo de GeoGebra y el material manipulativo en el proceso de construir conjeturas geométricas.

Condiciones de trabajo de la hoja de trabajo 1

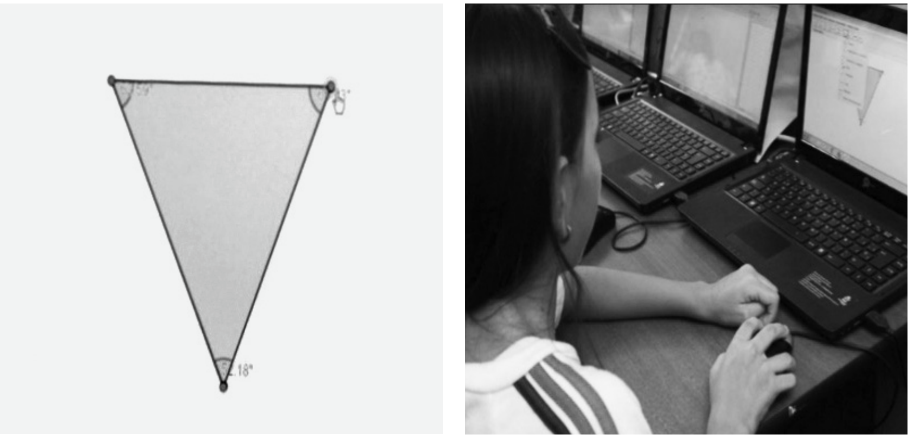
Esta hoja de trabajo la respondieron 28 estudiantes ,15 hombres [53,54 %] entre los 9 y los 14 años de edad, y 13 mujeres [46,46 %] entre los 9 y los 13 años de edad). Fue aplicada a cada estudiante el día 23 de octubre de 2019 de manera escrita hasta la pregunta número 7. En la pregunta 8, las conclusiones se socializaron con el docente y los compañeros de clase. Para solucionar las actividades de dicha hoja de trabajo, los alumnos usaron papel, lápiz, 1/8 de cartulina, colores, compás, pegante, tijeras (Figura 2); además de un computador por persona, con previa instalación del software dinámico GeoGebra. Los alumnos se capacitaron sobre el uso de GeoGebra. La actividad se llevó a cabo durante 120 minutos (Figura 3).

Las fases en las que se desarrolló el taller para la hoja de trabajo 1, en el grado cuarto de primaria, se describen en la Tabla 1.

FIGURA — 2
Medición de los ángulos internos con material manipulativo

Fuente: elaboración propia (2020).

FIGURA — 3
Medición de los ángulos internos con GeoGebra



Fuente: elaboración propia (2020).

TABLA — 1
Fases del desarrollo del taller para la hoja de trabajo 1

FASE	DESCRIPCIÓN
Taller de manejo de GeoGebra	Uso del software GeoGebra. Los alumnos exploraron la barra de herramientas y la vista de la hoja de cálculo.
Uso de GeoGebra	Los alumnos dibujaron un triángulo y midieron los ángulos internos del mismo. Al mover indistintamente cualquier vértice del triángulo, se formaron distintos ángulos internos que fueron anotados en la vista de la hoja de cálculo. El alumno sumó los ángulos internos y escribió con sus propias palabras una conjetura con base en el registro numérico.
Uso del material manipulativo	Los alumnos, usando el 1/8 de cartulina, dibujaron dos triángulos de diferente tamaño, con apoyo de un compás y teniendo en cuenta que debían trazar con la misma abertura los ángulos internos de cada triángulo. Luego procedieron a cortar los ángulos internos de cada triángulo y los fijaron sobre una línea recta trazada con anterioridad. Los alumnos debían construir una conjetura con base en el registro visual.
Socialización	En esta fase, los alumnos socializaron los resultados obtenidos y por medio de la técnica de “lluvia de ideas” construyeron conceptos fundamentados en su práctica. El docente hizo el papel de moderador.
Institucionalización	Terminada la socialización por parte de los alumnos, el docente organizó e institucionalizó las ideas y los resultados evidenciados en cada uno de los registros de la hoja de cálculo de GeoGebra y los elaborados con el material manipulativo.

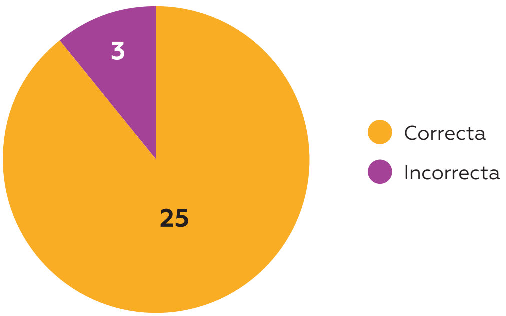
Fuente: elaboración propia (2020).

Pregunta 7 (Medir)

La actividad formulada fue la siguiente: cada estudiante manipulará y arrastrará uno de los vértices del triángulo para luego registrar en la siguiente tabla de la hoja de trabajo las diferentes medidas de los ángulos internos de los cuatro casos presentados. En la Figura 4 se observa que hay un elevado porcentaje de alumnos que logra medir los ángulos internos del triángulo. Los datos se registraron en la tabla de la ficha de trabajo y en la hoja de cálculo de GeoGebra, y se elaboró la suma de ellos.

En la Figura 4 se evidencia que, a pesar de haber realizado talleres previos sobre el uso de GeoGebra, al 10,72 % de los estudiantes se les dificultó medir de forma adecuada los ángulos internos de un triángulo, mientras que el 89,28 % de ellos logró hacer la medición. En esta clase de ambientes de aprendizaje el uso de GeoGebra forma parte del dominio de conocimientos o recursos de los que dispone el resolutor.

FIGURA —— 4
Pregunta 7 (Medir) - Hoja de trabajo 1



Fuente: elaboración propia (2020).

En la Figura 5 se muestran dos evidencias del trabajo realizado por los estudiantes para medir ángulos con ayuda de GeoGebra.

En la Figura 6 se puede ver una respuesta incorrecta. La alumna cometió una equivocación al realizar una de las sumas de las medidas de los ángulos del triángulo. Es evidente que aún no manejaba los recursos para medir los ángulos internos de un triángulo. De otro lado, aún no tenía desarrolladas las estrategias metacognitivas ni los mecanismos de control para detectar y corregir el error a tiempo. En consecuencia, las conclusiones relacionadas con la suma de los ángulos internos le dieron distintos resultados, por lo que se le dificultó construir la conjetura.

FIGURA —— 5
Estudiante 20 - Hoja de trabajo 1

7. Completa la tabla con los siguientes casos:

CASO	ÁNGULO 1	ÁNGULO 2	ÁNGULO 3	Suma de ángulos Internos de un Triángulo
1	72.65	53.99	53,36	180°
2	58.81	67.83	53.36	180°
3	58.79	96.21	45	180°
4	65.9	55.02	59.08	180°

Fuente: elaboración propia (2020).

FIGURA —— 6
Estudiante 15 - Hoja de trabajo 1

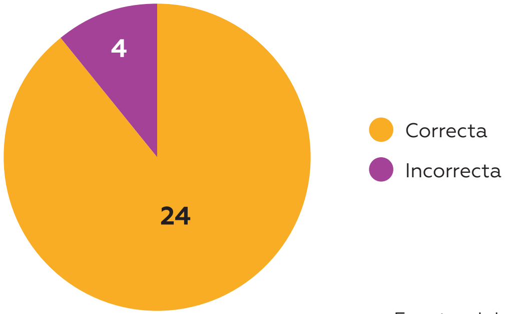
RESPUESTA INCORRECTA

Fuente: elaboración propia (2020).

Pregunta 8 (Conjeturar)

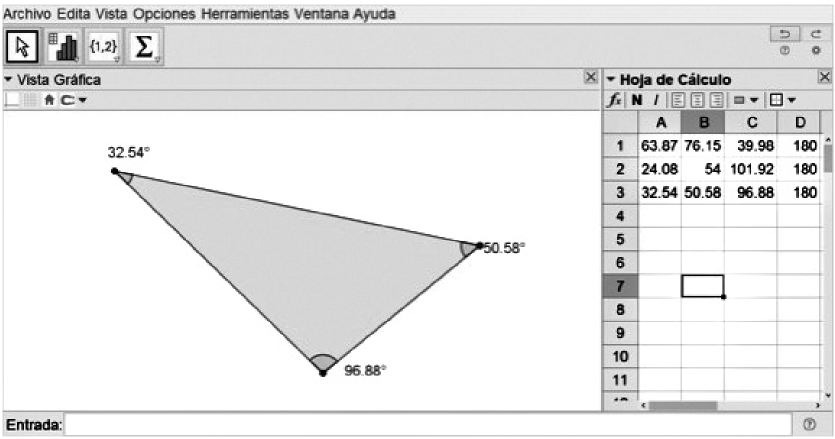
La actividad planteada fue la siguiente: según lo analizado en la actividad de recortado de la suma de los ángulos internos de un triángulo y lo realizado en GeoGebra, escribe en el siguiente espacio en blanco, utilizando tus propias palabras, ¿en qué consiste la ley sobre la suma de los ángulos internos en un triángulo? En las figuras 7 y 8 se observan los resultados de los estudiantes.

FIGURA —— 7
Pregunta 8 (Conjeturar) - Hoja de trabajo 1



Fuente: elaboración propia (2020).

FIGURA —— 8
Resultados de los estudiantes en la pregunta 8



Fuente: elaboración propia (2020).

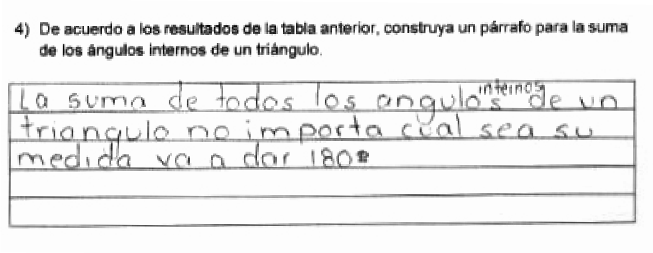
En cuanto a la construcción de conjeturas de los estudiantes, se pudo inferir que gran parte de los alumnos (85,71 %) lograron construir acertadamente la ley de la suma de los ángulos internos de un triángulo, ya que pudieron visualizar y encontrar invariantes geométricas, y construir la conjetura solicitada. De igual manera, se evidenció que los alumnos que aún no medían de forma correcta lo ángulos o que fallaron al realizar la suma de los ángulos internos del triángulo no alcanzaron a identificar el patrón o la regularidad, teniendo en cuenta que no interesa la forma, el tamaño o el tipo de triángulo sobre el que se trabaja, para que la suma de los ángulos internos sea igual.

Otro detalle importante en la construcción de las conjeturas fue el redondeo, pues en algunos casos la suma de los ángulos internos dio un aproximado de 179,98°, y los alumnos no lograron reconocer que esta mínima diferencia o error ocurre debido a la precisión de la medida y que, por lo tanto, la cantidad se puede redondear a 180°. En las figuras 8 (correcta) y 9 (incorrecta) se observan los manuscritos producidos por los estudiantes en las hojas de trabajo, durante el proceso de construcción de conjeturas.

FIGURA —— 9

Estudiante 5 - Hoja de trabajo 1

CORRECTA


4) De acuerdo a los resultados de la tabla anterior, construya un párrafo para la suma de los ángulos internos de un triángulo.

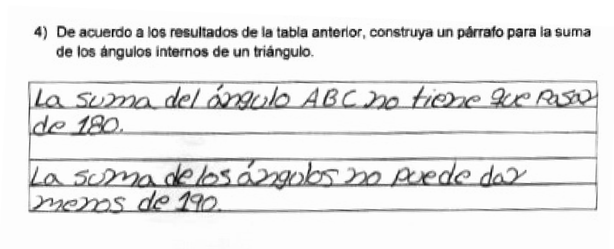
La suma de todos los angulo's internos de un triangulo no importa cual sea su medida va a dar 180°

Fuente: elaboración propia (2020).

FIGURA —— 10

Estudiante 4 - Hoja de trabajo 1

INCORRECTA


4) De acuerdo a los resultados de la tabla anterior, construya un párrafo para la suma de los ángulos internos de un triángulo.

La suma del ángulo ABC no tiene que pasar de 180.

La suma de los ángulos no puede dar menos de 190.

Fuente: elaboración propia (2020).

Una gran mayoría de alumnos (85,71 %) alcanzaron a construir la conjetura sobre la suma de la medida de ángulos internos del triángulo. Esto reveló un significativo progreso al proceso de aprendizaje de los estudiantes de cuarto grado de primaria, porque lograron medir, visualizar, encontrar patrones, regularidades, invariancias geométricas y expresar las ideas matemáticas con sus propias palabras. Sin embargo, fueron palpables los errores de ortografía y de redacción de los estudiantes.

Pregunta 5 (Recortar)

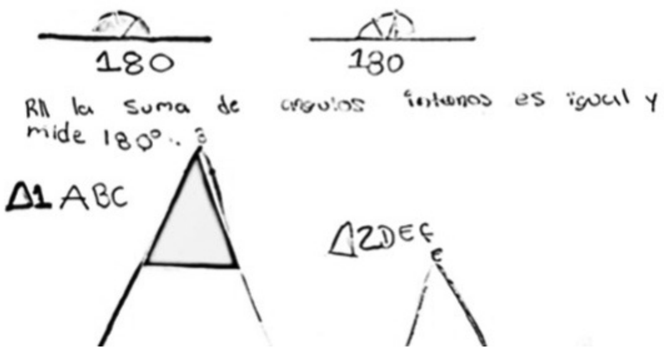
En esta instrucción los alumnos debían dibujar dos triángulos de distinto tamaño (uno grande y otro pequeño); luego, con ayuda de un compás, empleando la misma abertura, debían trazar los ángulos internos en cada uno de los triángulos dibujados para luego proceder a recortar los ángulos internos de cada uno de los triángulos, usando las tijeras. Posteriormente, debían pegarlos sobre un ángulo llano. Más adelante, se expusieron las evidencias del trabajo elaborado por los alumnos con el material manipulativo (Figura 10).

FIGURA —— 11
Trabajo de los estudiantes hoja de trabajo

Los 28 alumnos (100 %) recortaron los ángulos internos de cada triángulo y los pegaron sobre un ángulo llano, tal como se reporta en la Figura 11.

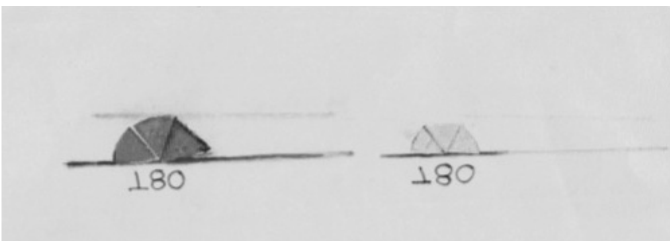
En las muestras aquí expuestas (figuras 12 y 13) se observa que los alumnos alcanzaron a recortar y pegar los ángulos internos de los dos triángulos (uno grande y uno pequeño). Esta actividad les permitió a los estudiantes analizar el resultado de la suma de la medida de los ángulos internos por medio de un registro gráfico de representación, lo cual suplementó el trabajo abordado desde el registro tabular o numérico de la hoja de cálculo de GeoGebra. Además, se evidenció que algunos alumnos presentaron inconvenientes en lo referente a la motricidad fina, al realizar el corte con las tijeras y pegado de los ángulos sobre el ángulo llano.

FIGURA —— 12
Estudiante 4 - Hoja de trabajo 1



Fuente: Manuscrito del estudiante (2020)

FIGURA —— 13
Estudiante 25 - Hoja de trabajo 1



Fuente: Manuscrito del estudiante (2020)

Pregunta 5 (Conjeturar).

En cuanto a que los estudiantes construyeran con sus propias palabras un párrafo sobre la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo, que correspondía al ítem 5, el estudio reveló que los alumnos, al recortar y pegar los ángulos sobre el ángulo llano, redactaron de distinta manera lo solicitado sobre la ley de la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo. Desde esta perspectiva, que se pueda afirmar que lograron construir sus propias conjeturas, tal como se observa en las figuras 14 y 15.

FIGURA —— 14
Estudiante 12 - Hoja de trabajo 1

Conclusiones

Los Dos triangulos son iguales a un Que tu los veas uno más grande y el otro chiquito todos Dos miden lo mismo Por Que la suma de los ángulos internos dan 180 grados.

Fuente: Manuscrito del estudiante (2020)

FIGURA —— 15
Estudiante 36 - Hoja de trabajo 1

N°: Frangerlis Loyo 4-4 / 11/09/2019.

Maria Panesso - Simon Rodriges

La ley de la suma interna de angulos consiste en: consiste que no importa el tamaño de triangulo y gual las suma de los angulos siempre ban a ser siempre 180°. 180°

Fuente: Manuscrito del estudiante (2020)

Este tipo de evidencias experimentales demuestran que los estudiantes de cuarto año de primaria, con la ayuda del profesor, pueden realizar actividades de aprendizaje mediadas por una hoja de trabajo, tecnología digital y materiales manipulativos, así como construir conjeturas sobre los objetos geométricos.

¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

En la línea de base se evidenció que gran parte (92 %) de los alumnos del grado cuarto de primaria desconocían la ley acerca de *la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo*. Sin embargo, al aplicar las secuencias didácticas, el 94 % de los alumnos fueron capaces de construir la conjetura sobre esta ley de manera correcta.

En las tablas 2 y 3 se observa que la implementación didáctica tuvo un impacto positivo en el grupo de estudiantes en varios aspectos: (a) en el aumento del promedio de rendimiento del 21,79 % en el test de entrada, al 94,6 % en el test de salida, y b) en el coeficiente de variabilidad (CV) se observó que el grupo inicialmente era muy heterogéneo y después de la intervención didáctica se hizo más homogéneo.

TABLA —— 2
Test de entrada

Media	21,79
Desviación típica	13,38
CV	61,40

Fuente: elaboración propia (2020).

TABLA —— 3
Test de salida

Media	94,64
Desviación típica	9,81
CV	10,37

Fuente: elaboración propia (2020).

Para producir los resultados altamente positivos en la construcción de conjeturas, fue necesario tener en cuenta: (a) un profesor con formación matemática y didáctica, (b) hojas de trabajo desarrolladas exprofeso, (c) material didáctico (computadores, *software* dinámico y material manipulativo) y (d) una metodología de trabajo que demanda un rol más activo de parte del estudiante.

Los alumnos intervinieron de forma dinámica durante todo el proceso de construcción de este conocimiento. Participaron en actividades como trazar triángulos y ángulos, medir, calcular, recortar, colorear, visualizar, encontrar patrones, regularidades, invariancias y conjeturar. La organización intencionada de este tipo de actividades motiva a los alumnos, y les permite establecer roles más participativos y proactivos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Se emplearon distintas representaciones semióticas, tales como visuales, tabulares y verbales (Duval, 1999). Estos diferentes registros de representación se complementan en los procesos de comprensión y articulación que se generan entre ellos, emergiendo así el conocimiento. La tarea de medir, arrastrar, mover, recortar, pegar y visualizar que la suma de los ángulos internos de un triángulo da como resultado media circunferencia o que en la hoja de cálculo de GeoGebra puedan verificar que la suma de la medida de los ángulos internos de todo triángulo da 180° permite que el conocimiento matemático sea palpable y que las construcciones elaboradas a partir de este método sean significativas para los alumnos.

Esta metodología promueve la innovación didáctica debido a que la propuesta de secuencia didáctica le permite a los estudiantes construir la ley por medio de conjeturas y se rompe con la educación bancaria, en la que el profesor es quien enuncia la ley, sin llegar a evidenciar verdaderos procesos de comprensión en los estudiantes.

El hecho de dibujar, arrastrar, medir, agrandar, achicar o construir tablas con la mediación tecnológica, permite que los alumnos estén atentos con respecto a los fenómenos y eventos que suceden en la pantalla del computador.

Según esta propuesta de trabajo, un ambiente de geometría dinámica es adecuado para la construcción de conjeturas desde la básica primaria sin importar la complejidad del lenguaje.

El desarrollo de esta clase de actividades le genera a los estudiantes curiosidad e interés. Los materiales tanto manipulativos como computacionales se constituyen en herramientas de mediación y motivación para la construcción de conocimiento matemático.

Los resultados de investigación que aquí se reportan invitan a hacer una reforma curricular en el área de matemáticas, lo que demanda estudiar contenidos y desarrollar habilidades matemáticas a una edad más temprana.

ANEXOS

ANEXO — A
Test de Entrada

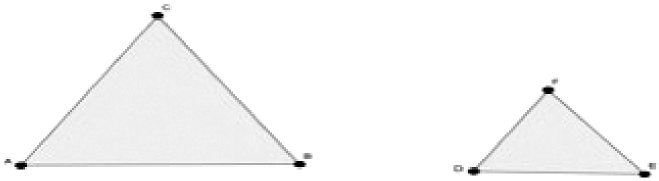
6. En el siguiente espacio en blanco dibuja un **ángulo llano**.

7. Con tus propias palabras describe qué entiendes por **ángulo llano**:

____

____

8. Observa la siguiente figura, en ella se observan los triángulos ABC y DEF:



Seleccione la opción que considere correcta, marcando una **X** dentro del paréntesis:

a) La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es **mayor** que la suma de los ángulos internos del triángulo DEF. ( )

b) La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es **igual** que la suma de los ángulos internos del triángulo DEF. ( )

c) La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es **menor** que la suma de los ángulos internos del triángulo DEF. ( )

d) No sé ( )

Justifique la respuesta: ____

____

____

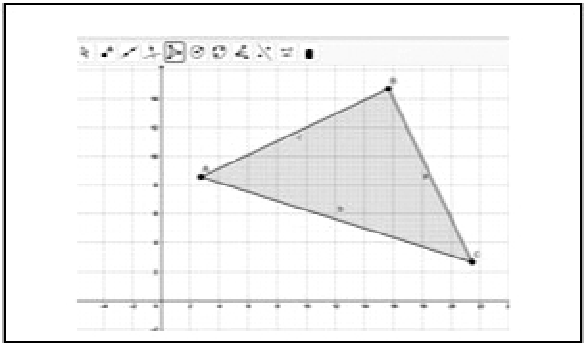
9. En la siguiente figura se han marcado los ángulos externos de un triángulo:

ANEXO —— B

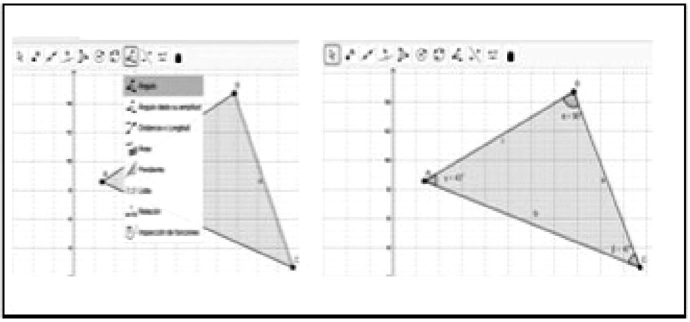
Hoja de Trabajo N°1

HOJA DE TRABAJO NO. 1
Institución Educativa Técnica de Comercio Simón Rodríguez
Universidad del Valle

1. Abre una ventana de Geogebra en la vista gráfica y dibuja el triángulo ABC :



2. Usando el botón de: ángulo de la vista gráfica de Geogebra, mide los ángulos internos del triángulo. ABC, como aparece en el ejemplo.



REFERENCIAS

BENÍTEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnología digital* (tesis doctoral), Departamento de Matemática Educativa].

BENÍTEZ, D. y Castañeda, L. (2005). *La influencia de la percepción en la construcción de conjeturas geométricas.* Universidad Pedagógica Nacional.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (MEN). (2017). *Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2026. El camino hacia la calidad y equidad.*

MORENO, L. y Santos, L. M. (2016). The Use of Digital Technology to Frame and Foster Learners'Problem-Solving Experiences. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problem* (pp. 5-32). Springer.

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* Trillas.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*Academic Press.

DUVAL, R.. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

EXPERIENCIA 2

Uso de la geometría en el diseño de recipientes para crispetas

YOLANDA GIRÓN COLORADO
LILIANA MARGARITA PLAZA LAFAURIE
LUIS ALBERTO MOSQUERA

RESUMEN

A partir de lo que significa la experiencia de ir al cine, los estudiantes del grado tercero tuvieron la oportunidad del proyecto denominado "promotores de cine Berch". Este fue un proyecto planeado para los dos primeros períodos del año lectivo 2019-2020, en el cual los estudiantes tuvieron la oportunidad de participar en aspectos propios de la logística para el montaje de una función de cine. Dentro de dichos aspectos estuvieron: la venta y compra de productos; venta y compra de las boletas de entrada; marcar la silletería de la sala vs la boletería; difusión e invitación de la película y la elaboración del diseño de las cajas para las crispetas, este último aspecto, se constituyó en la actividad central del proyecto, permitiendo el diseño de un ambiente de aprendizaje enmarcado en la utilización del programa GeoGebra, programa a través del cual los estudiantes en un principio, exploraron, identificaron, verificaron y reconocieron las propiedades geométricas de los cuadriláteros como el paralelogramo cuadrado y el trapecio isósceles, realizando la construcción de dichas figuras geométricas, siendo finalmente empleadas en la elaboración del diseño del recipiente.

¿DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

La institución educativa donde se implementó el proyecto es el colegio Berchmans, situado al sur de Cali, perteneciente al sector privado que, a su vez, hace parte de la Red de Asociación de colegios Jesuitas de Colombia (ACODESI). Alrededor de la Institución educativa hay una zona residencial que colinda con la Pontificia Universidad Javeriana de Cali.

El centro de su propuesta educativa es la persona como ser humano integral. Por tal razón, en la institución se acompaña a los estudiantes en su proceso de formación, donde todas y cada una de las actividades se viven con el sello de la educación jesuítica. Las características distintivas son: *el educar* teniendo en cuenta el contexto sociocultural, *el fomentar la autonomía y responsabilidad* en la relación del estudiante consigo mismo, con los otros y con el conocimiento; *desarrollar una didáctica personalizada* que permita a los estudiantes dar cuenta de las significaciones de la realidad y *promover en los espacios escolares la actividad, el trabajo individual y grupal, la creatividad, y la sana convivencia, así como el espíritu de trascendencia.*

El proyecto fue implementado en el grado tercero de primaria, el cual está conformado por 4 grupos de 32 niños cada uno, para un total de 128 estudiantes, de los cuales 52 son niñas y 76 son niños que oscilan en las edades de 9 y 10 años; la mayoría de los estudiantes inició su escolaridad en el preescolar del colegio. Para el desarrollo del colegio se contó con el acompañamiento de 4 maestras titulares de los grupos enunciados.

En la propuesta del proyecto y su desarrollo experimental se hizo en dos grupos (3B y 3D). Los otros grupos (3 A y 3C) participaron en calidad de grupos piloto.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

En el presente artículo se comparte una Experiencia Didáctica significativa en la Matemática escolar en el grado tercero de la básica primaria. El trabajo se desarrolló en el marco del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) donde, de manera transversal, se aborda una activad problemática que contiene actividades de las áreas de matemáticas, lenguaje, economía y artística.

El proyecto estuvo enmarcado especialmente en el desarrollo del pensamiento geométrico en un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes reconozcan las propiedades geométricas de los cuadriláteros y las empleen en el diseño de recipientes para crispetas utilizando el programa de GeoGebra.

Observando las dificultades presentadas con los estudiantes al momento de trabajar las propiedades geométricas de los cuadriláteros en procesos de verificación y construcción, haciendo uso del papel, lápiz, regla y escuadra, y con el propósito de motivarlos a partir de prácticas innovadoras en las clases, se asumió como reto, parte de las propuestas dadas en el diplomado ofrecido al colegio y dictado por la Universidad ICESI-Instituto GeoGebra Cali, el llevar al aula el uso de la tecnología, elemento que incentiva y motiva al estudiante de hoy en día para, posteriormente, alternarlo con el trabajo en el papel.

Al inicio del desarrollo del proyecto se observó rápidamente cómo los estudiantes se fueron apropiando con facilidad de las herramientas que proporciona el programa de GeoGebra y cómo a partir del desarrollo de las propuestas de cada clase lograban reconocer los elementos que conforman las figuras geométricas: vértice, segmentos, ángulos, superficie, además de comprender mejor ciertos conceptos geométricos tales como: punto, puntos de intersección, punto medio, medida de los lados y ángulos, relación de paralelismo y perpendicularidad entre los lados de una figura, congruencia, entre otros.

Las actividades de cada clase estaban enmarcadas en el uso de unas guías de trabajo que les permitía en un principio explorar, sacar conclusiones y llegar a definir cada figura enunciando sus propiedades. Posterior a ello, los estudiantes a partir del seguimiento de unas instrucciones lograron realizar construcciones del paralelogramo, paralelogramo cuadrado, trapecio y trapecio isósceles, figuras que se requerían para la elaboración del recipiente para las crispetas.

Sin embargo, desde otras áreas también se trabajó en el proyecto. En el área de lengua castellana se hizo reseña histórica de la película, se analizaron las intenciones y características de los personajes principales; en artística se elaboraron los afiches promocionando la película, los carteles con los precios de los productos que se iban a vender en la tienda.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

Se indica cómo se llevó a cabo, con cuáles supuestos teóricos y técnicas empleadas (aquí el elemento articulador es la hoja de trabajo), los factores que influyeron positiva y negativamente (a nivel institucional, local, organizativo, actuación de protagonistas...), los aciertos y errores, los cambios suscitados en la marcha. En esta sección se pueden presentar la fases o etapas de ejecución del proyecto. Es clave resaltar las condiciones en las que se ejecutó la hoja de trabajo (tiempos, roles, si fue individual o por equipos y los diferentes momentos de la clase).

Dentro de los referentes teóricos en los que fue basado el proyecto enunciado se encuentran:

- El concepto de competencia – Sergio Tobón. Según este autor una competencia es la capacidad que desarrolla un individuo para poner en práctica de manera articulada: conocimientos, habilidades, actitudes y valores.

  En la dimensión de conocimientos se encuentran los términos no definidos, las definiciones, los axiomas, los algoritmos y los teoremas. Mientras que las habilidades cognitivas (o heurísticas) son estrategias útiles en la resolución de problemas como: descomponer un problema en subproblemas, particularizar, conjeturar, generalizar. En las habilidades metacognitivas encontramos las preguntas que se autoformule el resolutor para entender, encontrar sus propios errores y superarlos.

  La actitud es la disposición que la persona tenga para estudiar las matemáticas. Estas actitudes pueden ser positivas o negativas.

  Los valores son principios éticos sobre los cuales se soporta el accionar todo individuo: respeto, puntualidad, cumplimiento, responsabilidad, tolerancia.

  En el diplomado trabajamos con cinco competencias: resolver problemas, proponer problemas, comunicar ideas, argumentar ideas, representar y modelar.

  El presente proyecto es una implementación fundamentada en la resolución de problemas de matemáticas con la mediación de las tecnologías digitales y el material concreto.

Objetivo general

Diseñar un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes reconozcan las propiedades geométricas de los cuadriláteros y las empleen en el diseño de recipientes para crispetas.

Objetivos específicos

1. Emplear el programa GeoGebra en la exploración, identificación y verificación de las propiedades geométricas de los cuadriláteros.
2. Realizar procesos de construcción de paralelogramos y trapecios en el diseño de recipientes para crispetas, mediante el uso de GeoGebra.

El trabajo incluyó las siguientes fases:

DIAGNÓSTICO: en la prueba diagnostica, la cual fue realizada a través de un ejercicio individual, se exploró si los estudiantes:

- Reconocían las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, entre segmentos de recta.
- Identificaban ángulos rectos, agudos y obtusos.
- Reconocían y verificaban con instrumentos la congruencia entre segmentos.
- Identificaban y designaban adecuadamente los elementos que conforman una figura geométrica bidimensional.

En los resultados del diagnóstico, se observó un porcentaje de acierto del 64 %, con una desviación estándar de 0,48. En esta aplicación, el coeficiente de variación es del 76 %, lo que nos mostró un alto nivel de dispersión entre aciertos y errores al responder la prueba.

Después de los resultados obtenidos en el diagnóstico se desarrolló una **ASESORÍA GRUPAL** con el propósito de retomar y afianzar en los estudiantes, los conceptos de paralelismo y perpendicularidad; así como también el reconocimiento y designación de los elementos que conforman las figuras geométricas bidimensionales. Junto con lo anterior, se realizó un trabajo de acercamiento, conocimiento y apropiación de los

TABLA 1
Indicar nombre

DIAGNÓSTICO	
Promedio	0,64
D. estándar	0,48
C.V.	76%

estudiantes hacía las herramientas que ofrece el programa de GeoGebra, haciendo énfasis en aquellas que iban a ser utilizadas en el proceso de la definición del paralelogramo, cuadrado, trapecio y trapecio isósceles, así como también en los procesos de verificación y construcción de los mismos, permitiéndoles tener los elementos para la elaboración de los recipientes para las crispetas como parte del proyecto "Cine Berch".

EXPLORACIÓN: posterior al trabajo diagnóstico y a la asesoría grupal, los estudiantes tuvieron la oportunidad de ir a la sala computacional para "explorar" las herramientas que les ofrece el programa de GeoGebra. Cabe anotar que se dejaron a su disposición únicamente las herramientas que los estudiantes requerían para el trabajo, facilitándoles un poco la apropiación de las mismas.

El trabajo estuvo enmarcado en el desarrollo por parejas de cuatro guías de trabajo, cada estudiante contaba con su guía para el registro.

COMUNICACIÓN: se contó con un computador para cada pareja; esta acomodación permitía que ambos estudiantes pudieran tener el tiempo de hacer el ejercicio en el programa, comunicarse entre ellos para definir conclusiones y/o el registro de los procedimientos llevados a cabo.

INSTITUCIONALIZACIÓN: en el proyecto se elaboraron las siguientes guías de trabajo:

- **Guía de trabajo No 1**. Paralelogramo.
- **Guía de trabajo No 2**. Trapecio.

- **Guía de trabajo No 3**. Cuadrado.
- **Guía de trabajo No 4.** Trapecio Isósceles.
- **Guía de trabajo No 5**. Diseño del recipiente para las crispetas.

En la primera guía de trabajo se contó con el apoyo de tres maestros en el aula, con el propósito de acompañar cercanamente a los estudiantes e irles ayudando a que resuelvan inquietudes o dificultades en el proceso, se fueran apropiando al manejo del programa y sus herramientas; de igual manera, se realizaron algunas puestas en común donde uno de los maestros modelaba situaciones importantes de retomar; todas estas intervenciones eran mediadas por el diálogo mutuo, la confrontación y retroalimentación. Bajo la misma dinámica se desarrollaron las siguientes guías donde finalmente se definen las propiedades de las diferentes figuras geométricas bidimensionales.

Para cada guía de trabajo, se destinaron entre dos y tres bloques de clase (hora y media cada bloque), observándose en la medida en que avanzaba en el trabajo mayor dominio por parte de los estudiantes de las herramientas tecnológicas ofrecidas por GeoGebra, así como también mayor autonomía y mayor rendimiento en el manejo de los tiempos.

EVALUACIÓN: tras el desarrollo de las diferentes hojas de trabajo, se explora tanto en entornos computacionales como en medios físicos si los estudiantes:

- Verifican relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre los lados de figuras geométricas bidimensionales.
- Clasifican cuadriláteros en paralelogramos o trapecios.
- Construye paralelogramos y trapecios.

En una de las evaluaciones aplicada posterior a la implementación de las hojas de trabajo de la secuencia metodológica propuesta, se observa un porcentaje de acierto del 92 % con una desviación estándar de 0,27. En esta medición el coeficiente de variación fue del 30 %, lo que nos muestra una reducción significativa en la dispersión entre aciertos y errores al responder la prueba.

TABLA 2
Indicar nombre

EVALUACIÓN	
Promedio	0,92
D. estándar	0,27
C.V.	30%

Para el abordaje de cada uno de los cuadriláteros propuesto en la secuencia de las guías, los estudiantes interactuaron con una construcción dinámica en un micro mundo computacional. El trabajo en este micro mundo computacional les permitió realizar abstracciones contextuales sobre los aspectos invariantes en las construcciones que, finalmente, se pudieron generalizar como propiedades geométricas.

Los estudiantes identifican con mayor facilidad las relaciones de paralelismo y perpendicularidad utilizando el programa de GeoGebra, ya que cuentan con herramientas que hacen explícitas estas relaciones o pueden llevar a cabo procesos de construcción para comparar visualmente si se cumple o no con alguna de estas relaciones.

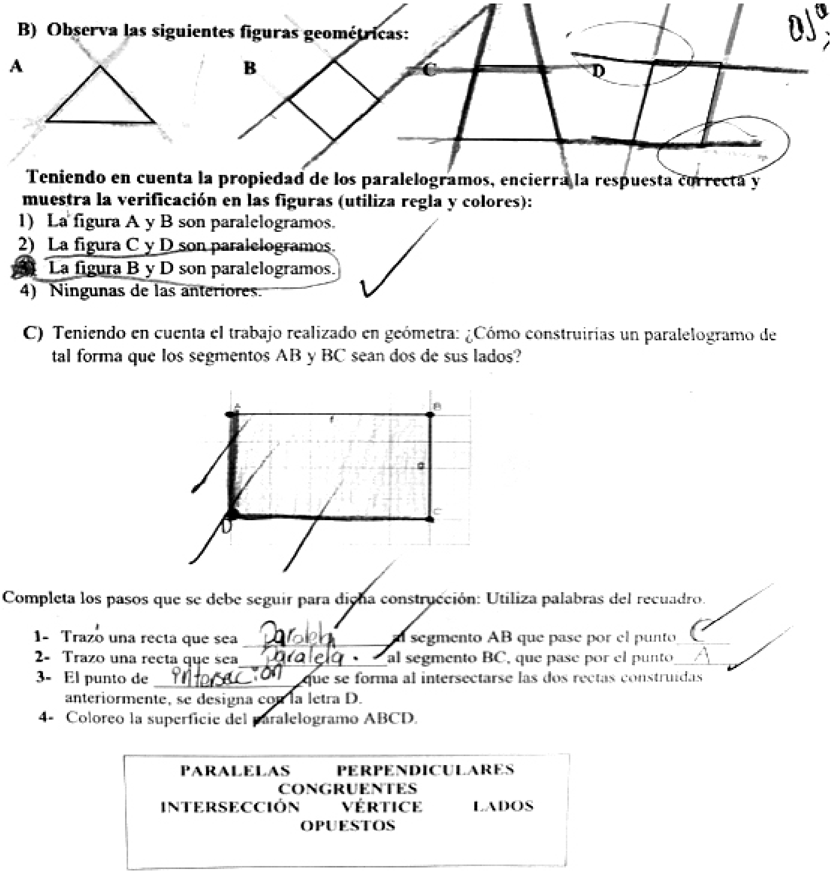
En este entorno, los estudiantes no se enfrentan a las dificultades inherentes al trazo con lápiz y papel, que presupone manejo de instrumentos como regla y escuadra, desarrollo de motricidad fina, precisión en los trazos, coordinación viso motriz, entre otros aspectos.

En un momento posterior se observa mayor comprensión de los procesos que deben desarrollar para llevar a cabo los procesos de construcción y verificación en medio físico de estas relaciones, empleando lápiz y papel.

¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

El proyecto estuvo enmarcado, básicamente, en el desarrollo de las guías mencionadas anteriormente, que contienen una secuencia de actividades que le permitió a los estudiantes explorar a partir de las herramientas

IMAGEN —— 1
Estudiando propiedades geométricas básicas


B) Observa las siguientes figuras geométricas:

A B C D

Teniendo en cuenta la propiedad de los paralelogramos, encierra la respuesta correcta y muestra la verificación en las figuras (utiliza regla y colores):

1) La figura A y B son paralelogramos.
2) La figura C y D son paralelogramos.
3) La figura B y D son paralelogramos.
4) Ningunas de las anteriores.

C) Teniendo en cuenta el trabajo realizado en geómetra: ¿Cómo construirías un paralelogramo de tal forma que los segmentos AB y BC sean dos de sus lados?

Completa los pasos que se debe seguir para dicha construcción: Utiliza palabras del recuadro.

1- Trazo una recta que sea paralela al segmento AB que pase por el punto C
2- Trazo una recta que sea paralela al segmento BC, que pase por el punto A
3- El punto de intersección que se forma al intersectarse las dos rectas construidas anteriormente, se designa con la letra D.
4- Coloreo la superficie del paralelogramo ABCD.

PARALELAS PERPENDICULARES
CONGRUENTES
INTERSECCIÓN VÉRTICE LADOS
OPUESTOS

de GeoGebra los elementos de las diferentes figuras geométricas, reconociendo sus vértices, lados, ángulos y superficie; igualmente, se vieron enfrentados a establecer la relación de perpendicularidad y paralelismo entre los lados de las figuras realizando trazos para construir o verificar dichas relaciones.

A través de la prueba del arrastre, en este caso de los vértices, los estudiantes reconocieron qué elementos y relaciones se conservaban en la figura al realizar dicha prueba para, de esta manera, reconocer las propiedades que definen a cada una de estas figuras. Finalmente, la actividad propuesta fue que los estudiantes, a partir del trabajo anterior, pudiesen realizar las construcciones del paralelogramo, cuadrado, trapecio y trapecio isósceles.

Todo esto, es un modelo representativo del contenido y propuestas para los estudiantes en las diferentes guías de trabajo como la siguiente:

¿QUÉ RESULTADOS SE OBTUVIERON? ¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

La situación planteada donde, a partir del uso de la geometría y el empleo de las herramientas que ofrece el programa de GeoGebra, se realizó el diseño de recipientes para crispetas, se constituyó en un PROBLEMA REAL, pues el referente donde se desarrolló la situación involucró una situación real: “el montaje del cine”. Por ser un contexto familiar para los estudiantes, resultó de más fácil abordaje en el aula y, de igual manera, el manejo de la herramienta computacional, resultó de gran utilidad

En primer lugar, es importante señalar que los resultados a nivel cuantitativo muestran un alto impacto en los aprendizajes de los estudiantes de la secuencia implementada. Entre las dos mediciones realizadas se observa un aumento significativo en el promedio de aciertos que pasa del 64 % al 9 2%, y una reducción también importante en la dispersión de los resultados obtenidos, puesto que el coeficiente de variación pasa del 76 % al 30 %.

Las razones de este impacto positivo de la secuencia creemos se encuentra en que:

- El uso de ambientes de aprendizaje mediados por tecnología, en particular por GeoGebra, permitió que los estudiantes lograran poner en juego de manera articulada conocimientos, habilidades, actitudes y valores. Es decir, permite el desarrollo de competencias, genera motivación, brinda posibilidades de trabajo en equipo, necesidades de comunicación, tanto de manera oral como escrita.

- El trabajo con GeoGebra permitió desligar la comprensión conceptual de las dificultades inherentes a los procesos de construcción y verificación con lápiz y papel. Estos últimos presuponen el desarrollo de ciertas habilidades con instrumentos como regla, escuadra, compás, que demandan mucho tiempo en su adquisición. Una vez que se ha legado a la compresión conceptual mediante GeoGebra, el paso al entorno de lápiz y papel resulta más sencillo.

En la implementación de la secuencia metodológica encontramos que:

- La mediación tecnológica en estos ambientes de aprendizaje requiere de un proceso de preparación de parte de los estudiantes en relación con las herramientas que cumplen esta función mediadora.
- En estos ambientes de aprendizaje se modifican las secuencias de enseñanza. Los maestros revalúan su rol, las clases pasan de ser instructivas a convertirse en espacios de discusión y generación de conocimiento.
- El cambio en las secuencias de enseñanza ha generado la necesidad de vincular en el diseño y discusión de las actividades propuestas a otros maestros del grado.
- Algunas familias han mostrado interés en que este trabajo realizado en el colegio pueda tener continuidad y momentos de práctica en sus casas.

REFERENCIAS

Barrera, F. y Santos, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamentos. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 166-185). MEN}

Sacristan, A. (2003). La importancia de los micro mundos computacionales como entornos didácticos estructurados para fomentar e investigar el aprendizaje matemático. Articulo presentado al 3er Congreso Internacional de enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora (CIEMAC) en el Instituto Tecnológico de Costa Rica en Cartago, Costa Rica

Tobón, S. (2006). Aspectos básicos de la formación basada en competencias. Talca: proyecto Mesesup

EXPERIENCIA 3

GeoGebra en la enseñanza del concepto de simetría axial. Una experiencia monstruosa en grado tercero

YENNY CIFUENTES BOCANEGRA
YARI CARIME RIASCOS MOSCOSO

RESUMEN

El presente trabajo contiene una experiencia didáctica en el área de matemáticas para estudiantes de grado tercero del sector oficial de la Ciudad de Cali. Se diseñó e implementó un proyecto que combina actividades de geometría, tecnología, artística y convivencia. Las actividades se desarrollan con la mediación del software de GeoGebra y de material manipulativo para construir propiedades geométricas.

¿DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

La experiencia se desarrolló en la Institución educativa oficial Libardo Madrid Valderrama, ubicada en la comuna 16 de la ciudad de Cali, la cual está conformada por 4 sedes, tres de ellas ofrecen los niveles de preescolar y primaria, y la cuarta es la sede principal que ofrece el bachillerato diurno y educación formal para adultos en el nocturno.

La mayoría de los estudiantes reside en los barrios de la comuna y se distribuyen así: 57 % se encuentran en la sede principal, 21 % en la sede Angélica Sierra, 14 % en la sede Pablo Neruda y el 8 % restante en la sede Primero de mayo. Desde el Proyecto Educativo Institucional (PEI) el modelo pedagógico de la Institución se fundamenta en el Aprendizaje significativo, activo y constructivista que propende a la formación integral de los estudiantes para el ejercicio de la ciudadanía.

El proyecto fue denominado La Fiesta de los Monstruos como experiencia se desarrolló con un grupo de 36 estudiantes de grado tercero pertenecientes a la Sede de primaria Angélica Sierra Arizabaleta ubicada en el Barrio La Unión. La mayoría de ellos oscilan entre los 8 y los 10 años de edad y era la primera vez que se acercaban al software matemático. Cabe resaltar que la Sede Angélica Sierra cuenta con dos Aulas Tit@s dotadas de 38 portátiles cada una, conectividad y un tablero inteligente con su respectivo video beam, que posibilitaron la implementación de las hojas de trabajo propuestas en el marco de la experiencia. El tiempo de ejecución fue de dos meses, correspondientes al segundo período del año escolar, cuando en el Plan de Aula del área de matemáticas se presentaba la Situación #2 **La Fiesta de los Monstruos** de la Cartilla Todos A Aprender 2.0 del Ministerio de Educación Nacional (MEN)

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

El presente artículo describe una experiencia educativa que aporta a la implementación de prácticas integradoras del currículo, mediante el desarrollo de un proyecto de aula “La fiesta de los Monstruos”, que involucró el uso del software de GeoGebra. El proyecto integró contenidos y habilidades de ciencias, matemáticas artística y lenguaje. Este tipo de actividades dan la posibilidad de construir un ambiente de aprendizaje que motiva a los estudiantes y le asigna roles activos en la construcción de su propio conocimiento.

En el presente artículo se analiza el diseño de las hojas de trabajo, la implementación del software de GeoGebra y la aplicación del concepto de simetría en un contexto real al diseñar una tarjeta de invitación.

Para el caso de los aprendizajes en Matemáticas y las competencias propuestas a trabajar en la experiencia se tiene que esta se enmarca en el *Pensamiento Espacial y Sistemas Geométrico*, en el estándar "Reconozco y valoro simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño" *y* en el Derecho Básico de Aprendizaje (DBA) N°6 *"Describe y representa formas bidimensionales y tridimensionales de acuerdo con las propiedades geométricas"* (MEN, 2018). Así, como en la competencia de *Resolución y formulación de problemas.*

En este sentido, las actividades presentadas en la hoja de trabajo inician con el doblado de papel para la comprensión del concepto de simetría y para hallar los ejes de una figura; y sigue con la implementación de GeoGebra para reconocer y enunciar algunas propiedades. Por consiguiente, en las tareas que se presentaron a los estudiantes debían:

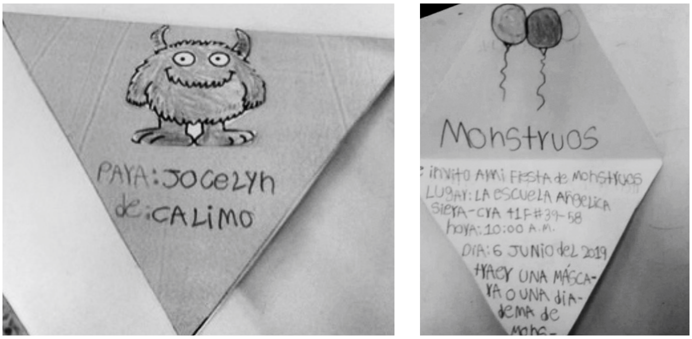
- Relacionar objetos de su entorno con formas bidimensionales, nombrar y describir sus elementos.
- Clasificar y representar formas bidimensionales tomando en cuenta sus características geométricas comunes y describe el criterio utilizado.
- Interpretar, comparar y justificar propiedades de formas bidimensionales.

Adicionalmente, la integración de los anteriores aprendizajes de matemáticas con otras áreas durante la realización del proyecto presenta una mirada holística del conocimiento y será el estudiante quien establezca las relaciones con el contexto real: *La Fiesta de los Monstruos*.

En la situación N°2 se describe la intención de organizar una fiesta por parte del Monstruo Calimo con motivo del Congreso Anual de Monstruos a realizarse este año. Para ello, los estudiantes debían diseñar la tarjeta de invitación, proponer algunas actividades de entretenimiento para la fiesta, y armar el pincho con gomas de tortugas y gusanos que resultan apetitosas para cualquier monstruo.

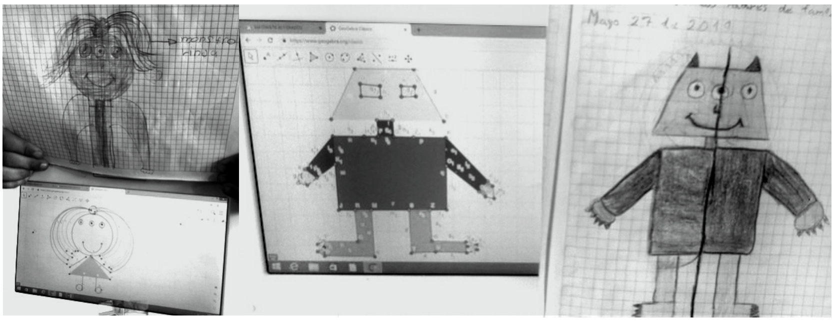
Es así, como desde el lenguaje se trabajó lo relacionado con la escritura de una tarjeta de invitación con algunas preguntas orientadoras: ¿a quién se le escribe la tarjeta?, ¿quién invita a la fiesta?, y ¿qué información debe presentar? A continuación, se muestra una de ellas.

FIGURA —— 1
El diseño de la Tarjeta de invitación



Desde la Educación Artística los estudiantes hicieron la representación mediante la creación propia un monstruo, al que le dieron un nombre y luego lo llevaron a GeoGebra, haciendo uso de objetos geométricos como semicírculos, segmentos, polígonos a los cuales los editan con color. Este primer acercamiento al Software fue toda una exploración que promovió el uso de un lenguaje geométrico, sin mayores dificultades porque lograban visualizar el elemento que se necesitaba en la construcción del monstruo.

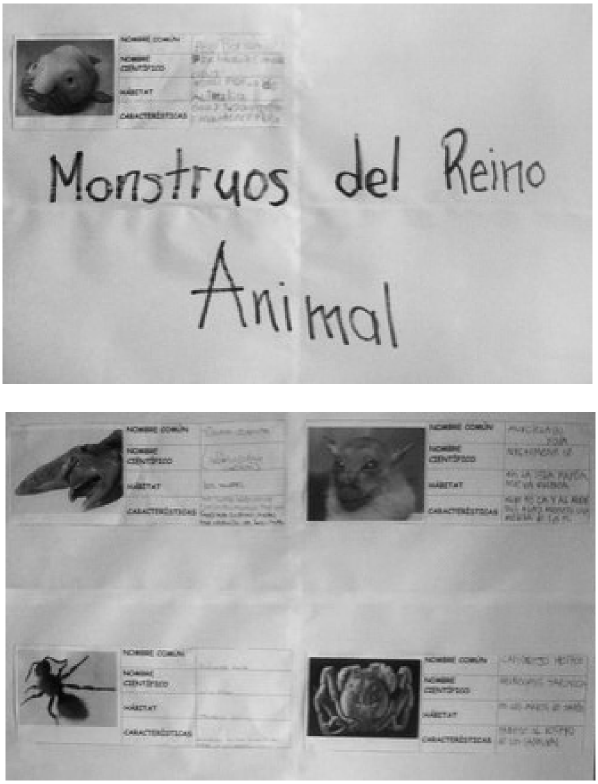
FIGURA —— 2
Creación artística propia del monstruo deseado



En las producciones presentadas en la Figura 2 se evidencia que los estudiantes tienen recursos como polígonos, segmentos, círculos y manejan la definición de simetría axial vertical.

En el área de las Ciencias Naturales se presentó un artículo científico titulado "Feria de los monstruos: las joyas más raras del reino animal" (Yanes, 2016). A partir del texto, los estudiantes extraen información y completaron una ficha con las características especiales de estas criaturas (Figura 3).

FIGURA —— 3
Feria de los monstruos: las joyas más raras del reino animal



¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

Esta sección está dividida en dos partes: (i) supuestos teóricos y (ii) diseño metodológico.

1. Supuestos teóricos

a. Resolución de problemas

Actualmente, el aprendizaje escolar de las matemáticas ha trascendido de la simple memorización de reglas o algoritmos, propiedades o hechos a la construcción de conocimiento por el mismo estudiante para dar solución a diversos problemas matemáticos, de otras disciplinas o de la vida misma.

En este sentido, algunos autores como por ejemplo G. Polya propone una heurística para la resolución de problemas,

- Comprender el problema, saber cuáles son los datos que se tienen, conocer cuál es la incógnita, qué condiciones hay, entre otras.
- Concebir un plan, en este aspecto, propone que los estudiantes se piensen si en otra ocasión han tenido un problema parecido, invita a que los estudiantes parafraseen la situación con sus propias palabras y, de esta manera, se perciba hasta dónde se ha comprendido el problema, dar ejemplos de otra situación parecida, entre otras.
- Ejecutar el plan: lo que se pensó en el paso 2 ahora lo va a realizar, verificar los pasos y comprobar que claramente sirvió el plan propuesto.
- Examinar la solución obtenida: los resultados obtenidos al ejecutar el plan deben ponerse a prueba, verificar razonamientos y demostrar que efectivamente son los correctos.

A través de estos cuatro pasos en la resolución de problemas matemáticos se pretende la participación activa de los estudiantes, se pone en juego la creatividad, el ingenio y se moviliza el pensamiento matemático.

Cabe destacar que las Mallas de Aprendizaje y los DBA propuestos por el MEN, en correspondencia con los lineamientos curriculares de matemáticas y los Estándares Básicos de Competencias, asumen la actividad matemática desde la resolución de problemas.

b. Mediación de la tecnología en el aprendizaje

Estamos en un mundo que atraviesa por cambios tan agigantados respecto a las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, en el cual no solo existe demasiada difusión de la información, sino que esta está al alcance de todos; pero hay que decir que ante este panorama es imperante el llamado que se le hace a la escuela para reflexionar en la práctica educativa, pues es uno de los escenarios más propicios en el que se desarrollan procesos para aprender, además, durante años se le ha descargado la mayor responsabilidad de la educación y formación del ser humano, por tal motivo se hace necesario que como docentes reflexionemos y nos pongamos en acción para descubrir que el potencial de las TIC transforma la práctica educativa.

Esta integración de las TIC abre la posibilidad a nuevas formas de aprender, se puede evidenciar cómo en el modelo TPCK lo más importante es la utilidad que se le da al conocimiento, es decir, no es algo que este diseñado y que se tenga que impartir a los estudiantes; esta cultura de aprendizaje que correspondió a un modelo tradicionalista debe ser transformada en este cambio de época que se vive actualmente por modelos innovadores que permitan la producción y adquisición de conocimientos desde otras formas, y es aquí donde la tecnología entra a desempeñar un papel decisivo en la construcción de nuevos entornos de aprendizaje.

Al respecto, el modelo SAMR expuesto por el Dr. Ruben Puentedura propone que si el objetivo es integrar la tecnología para mejorar y alcanzar niveles altos en el aprendizaje, la clave está en idear cómo usarla para que los estudiantes tengan la oportunidad de aprender en escenarios imposibles de imaginar sin ella, de tal manera que propone cuatro niveles de integración de la tecnología, los cuales se van complejizando tanto en la forma como en el efecto que se espera al incorporarla en los procesos de enseñanza-aprendizaje que se planifican, estos son: sustitución, aumento, modificación y redefinición.

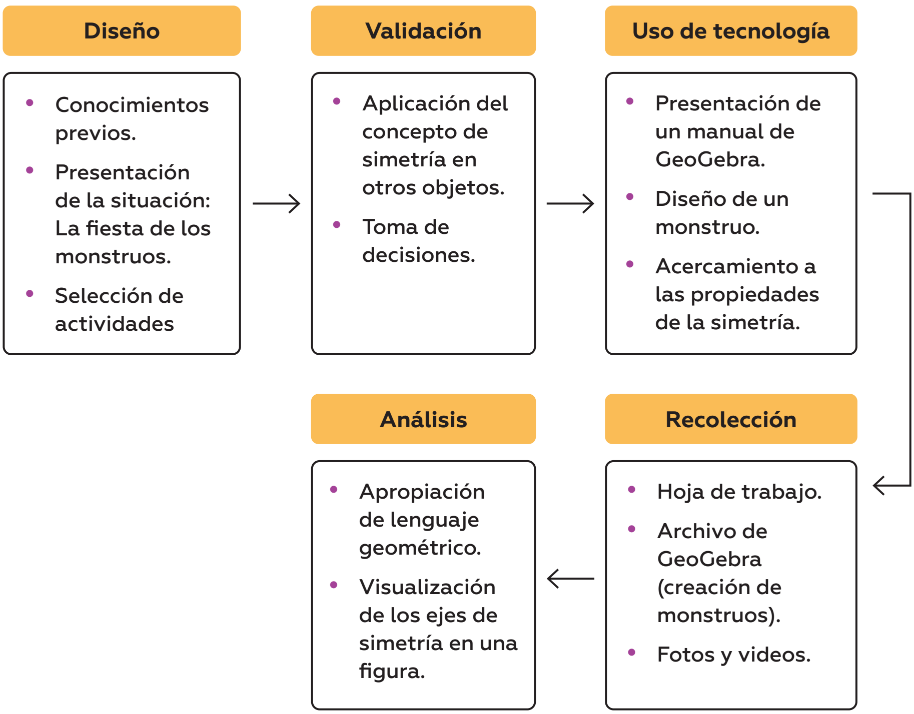
La utilización de ambientes digitales plantean nuevas perspectivas metodológicas como, por ejemplo, GeoGebra, software que permite hacer representaciones dinámicas en las que los estudiantes pueden desarrollar procesos del pensamiento geométrico para particularizar, visualizar, construir patrones, conjeturas y contraejemplos, a través de varias acciones como: el trazo de objetos geométricos, la prueba del arrastre, la medición, el lugar geométrico y la utilización de diferentes registros de representación.

GeoGebra es un software que permite que el estudiante se relacione con la geometría de forma dinámica; se caracteriza como un micromundo computacional. Esto quiere decir que la herramienta a través de los objetos que tiene (arrastre, el movimiento, los lugares geométricos, el uso de diversas representaciones semióticas y la realización de macroconstrucciones) abre la posibilidad para que al realizar diversas operaciones sea el mismo estudiante quien realice sus propias conjeturas y estas, a su vez, lo lleven a la construcción de propiedades, patrones, entre otras.

2. Diseño metodológico

Los cinco momentos que se implementaron durante la realización del proyecto se basaron en las fases de estudio sugeridas por Benitez (2006).

FIGURA —— 4
Fases de estudio



Como se puede observar en la tabla anterior, el diseño metodológico contine 5 momentos:

- **a.** Diseño: consiste en elaborar una situación de aprendizaje en formato de hoja de trabajo, la cual contiene una situación problema y unas sugerencias.
- **b.** Validación. Consiste en en certificar mediante distintas técnicas que la hoja tiene características de calidad y que al implementarla se obtendrán los objetivos trazados.
- **c.** Uso de tecnología. Se realizaron diferentes actividades para lograr la apropiación instrumental de los estudiantes con GeoGebra.
- **d.** Toma de datos. Es la implementación de actividad en el aula.
- **e.** Análisis: Reflexión sobre los resultados obtenidos a la luz del marco teórico.

a. Diseño e implementación de la hoja de trabajo #1

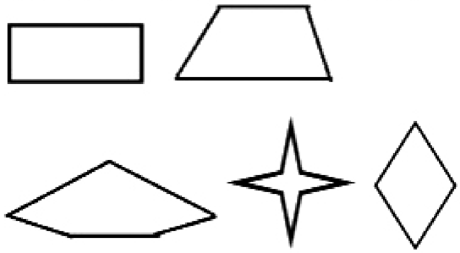
Para el diseño de la primera hoja de trabajo se tuvieron en cuenta las condiciones que debía tener la tarjeta de invitación según la cartilla Todos a Aprender del MEN:

- La tarjeta debe ser una figura de cuatro lados.
- La tarjeta debe tener al menos un ángulo obtuso.
- La tarjeta debe ser simétrica**.**

Para ello, los estudiantes debían seleccionar de los cinco polígonos que se presentan en la ilustración 1 la figura que cumpliera con las siguientes condiciones.

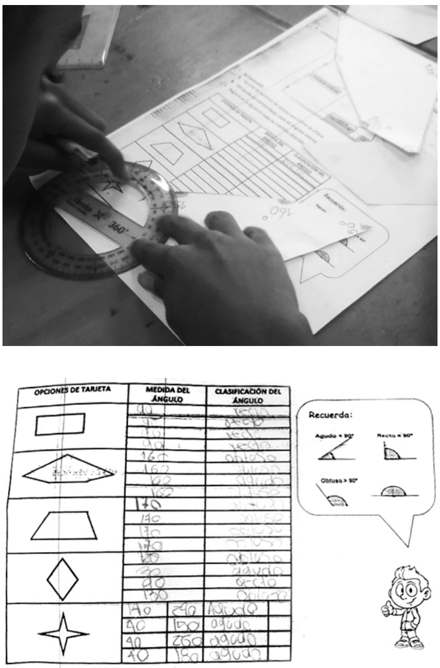
Para ello, la actividad inicial de la hoja de trabajo pretendía indagar los conocimientos previos de los estudiantes; de esta manera, el diagnóstico estuvo relacionado con la definición de figura plana, polígono y los elementos que la conforman. Con esta actividad los estudiantes estarían en capacidad de seleccionar del conjunto de polígonos los cuadriláteros.

FIGURA —— 5
Ilustración 1 en la guía de trabajo



Seguidamente, se debían abordar la medida de los ángulos internos de los polígonos para encontrar la figura con al menos un ángulo obtuso, por lo que la hoja de trabajo les propone el uso del transportador, tal como se observa en la foto.

FIGURA —— 6
Medición y clasificación de los ángulos internos de las figuras



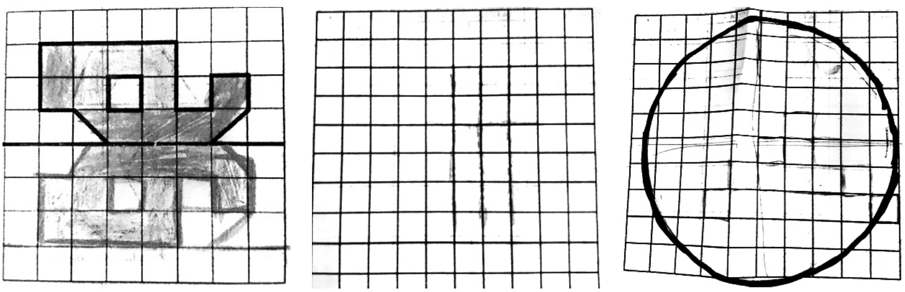
A partir del uso de este instrumento, los estudiantes validaron qué polígonos cumplían la condición 1 y 2 del texto.

Para la tercera condición, la hoja de trabajo propone que cada figura sea doblada tratando de hacer coincidir los lados opuestos de la figura en lo posible. De esta forma, los estudiantes logran hallar el eje o los ejes de simetría de los polígonos. Al terminar el desarrollo de la hoja de trabajo los estudiantes ya tenían seleccionada la figura que usarían como tarjeta de invitación.

b. Validación

Una vez finalizado el trabajo con material manipulativo, se le presentaron a los estudiantes otras clases de objetos como: letras del alfabeto, diseños de monstruos de sus compañeros y elementos de la naturaleza con el propósito de determinar si hay o no simetría y, de existir esta última, cuántos ejes puede observar.

FIGURA —— 7
Hallando ejes de simetría en otros objetos



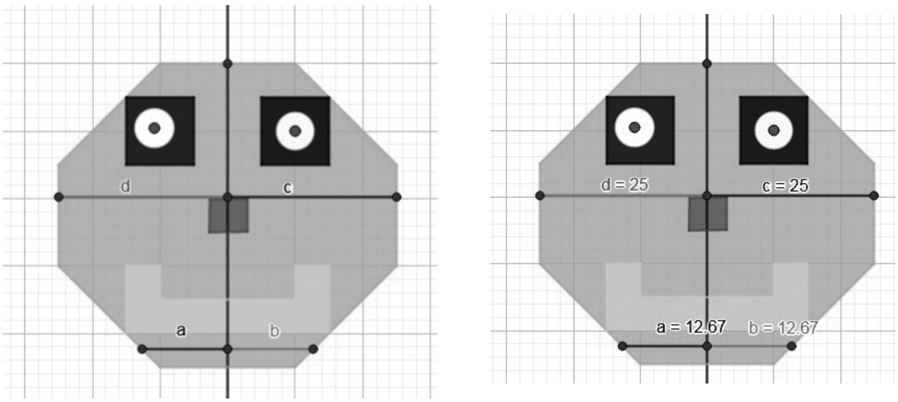
Las anteriores fotos evidencian la aplicación del concepto de simetría en objetos diferentes a las figuras planas. Para el caso de una letra del alfabeto que presentará al menos dos ejes de simetría recurren en su mayoría a la ilustración de las letras H y O.

c. Uso de tecnología

En esta fase se realiza un ajuste en el diseño porque en la validación se observó un alto grado de apropiación del concepto de simetría, por lo que el nivel de complejidad se aumentó al proponer en la hoja de trabajo N°2 un manual de GeoGebra que permitiera acercar a los estudiantes a las propiedades y enunciarlas como tal.

Para la consecución del anterior propósito los estudiantes utilizaron el monstruo de Astrid que había sido recreado con la herramienta simetría axial y con la medida de distancia o longitud y la dinámica del mueve, logrando visualizar la equidistancia de los puntos de la figura al eje de simetría, tal como se muestra en la siguiente foto.

FIGURA —— 8
Comprobación del a distancia de cada punto al eje de simetría



Manipular desde el software el monstruo y visualizar lo que permanece y lo que cambia facilitó la enuncian de conjeturas y el aprendizaje por descubrimiento necesario para comprender el sentido y significado del objeto matemático trabajado.

d. Recolección

En esta fase de estudio se recolectaron las hojas de trabajo, los escritos de los estudiantes en sus cuadernos, los registros fotográficos y las creaciones de monstruos como archivos de GeoGebra. A pesar de que era la primera vez que los estudiantes estaban expuestos al uso del software, se evidenció que este les permitía el disfrute de la actividad y el desarrollo de la creatividad cuando se trata de resolver problemas.

A cada estudiante se le entregó la hoja de trabajo para desarrollar de manera individual, sin embargo, cada uno de ellos hacía parte de un grupo de trabajo conformado por cuatro compañeros con quienes contrastaban sus producciones. La intervención de la docente consistía en hacer pregunta, retomar conclusiones que ellos elaboraban y ponerlas en consenso para la formalización del concepto de simetría y sus propiedades.

e. Análisis

La integración del software de GeoGebra en la construcción del concepto de simetría facilitó la apropiación del lenguaje geométrico necesario para la realización de las actividades propuestas en la hoja de trabajo. Los iconos que se describen en la parte superior de la vista y las representaciones que se usan propician una mayor comprensión de los elementos básicos al momento de construir las figuras como segmento, polígono, punto, ángulos, entre otros.

En las figuras se observa la construcción de un ángulo recto y el uso de la herramienta medida de los ángulos internos de un polígono. Durante la actividad desarrollada en este ambiente tecnológico se evidenció que los estudiantes utilizaban con más facilidad el transportador para medir ángulos que la herramienta que ofrece GeoGebra. Indagando un poco más con ellos se concluyó que la dificultad radicaba en que no nombraban los tres puntos necesarios para la medida del ángulo, y que se debía dar claridad al sentido y orden en que se seleccionaban dichos puntos. Después de dar las explicaciones necesarias, los estudiantes lograron realizar con éxito las actividades.

Otro aspecto a analizar está relacionado con la visualización de los ejes de simetría y la equidistancia de los puntos de la figura a este. Doblar las figuras que se presentaban en la situación y hacer en lo posible que los lados o vértices opuestos coincidieran, es el principio de la comprensión del concepto de simetría, y con él algunas conjeturas y generalizaciones surgen desde el empleo de la herramienta distancia o longitud, observando lo que permanece y lo que cambia las siguientes figuras muestran algunos escritos de los estudiantes.

FIGURA —— 9
Midiendo ángulos internos de un polígono en GeoGebra

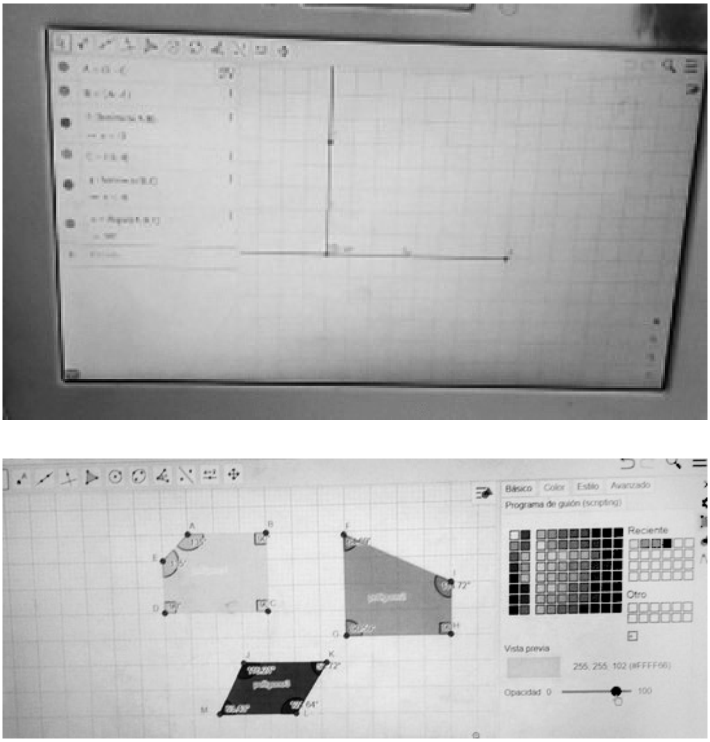
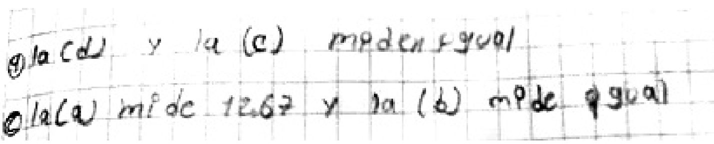


FIGURA —— 10
Título



¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

En cuanto al software se trabajó con la versión 5 de GeoGebra, una hoja de trabajo diseñada especialmente para el proyecto, estuche de geometría como regla, transportador, colores.

La combinación del uso de material concreto y de la tecnología es complementaria. En cada espacio los estudiantes desarrollan habilidades distintas. Adicionalmente, los estudiantes aprenden de manera muy divertida.

¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

En este trabajo se logró diseñar e implementar un proyecto interdisciplinario, porque combina aspectos de las matemáticas, la tecnología y la clase de artística.

También logramos combinar el uso de la tecnología y el material concreto.

Se trabajó en la construcción de propiedades geométricas y además estuvieron desarrollando una actividad de integración denominada una fiesta Monstruosa, que mejora su convivencia, y que les ayuda a integrarse y a aprender de manera diferente a la tradicional.

REFERENCIAS

BENÍTEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnología digital* (tesis doctoral), Departamento de Matemática Educativa].

YANES, J. (2016). Fiesta de monstruos: Las joyas más raras del mundo animal. recuperado de (https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/biociencias/feria-de-monstruos-las-joyas-mas-raras-del-mundo-animal/)

MEN(2017). Mallas de aprendizaje http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/MATEM%C3%81TICAS-GRADO-3.pdf

ROSALES .J (s.f). Los 4 pasos de Polyahttps://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/ResolProblema/index.html

TECNOLOGÍA DIGITAL Y COGNICIÓN MATEMÁTICA: RETOS PARA LA EDUCACIÓN. Recuperado de file:///C:/Users/Docente/Downloads/109-Texto%20del%20art%C3%ADculo-166-1-10-20140701.pdf

MODELO TPACK. http://www.educdoscero.com/2012/04/el-modelo-tpack-el-saber-docente-cuando.html, recuperado el 18 de abril/2017

GARCIA-UTRERA. L., Figueroa-Rodriguez, S. & Esquivel-Gámez, I. (2014). Modelo de Sustitución, Aumento, Modificación,y Redefinición (SAMR): Fundamentos y aplicaciones. En I. Esquivel-Gámez (Coord.), Los Modelos Tecno-Educativos: Revolucionando el aprendizaje del siglo XXI (pp. 205-220). México: DSAE-Universidad Veracruzana.

VALVERDE BERROCOSO, JESÚS; GARRIDO ARROYO, MARÍA DEL CARMEN; FERNÁNDEZ SÁNCHEZ, ROSA. ENSEÑAR Y APRENDER CON TECNOLOGÍAS: UN MODELO TEÓRICO PARA LAS BUENAS PRÁCTICAS CON TIC Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información, vol. 11, núm. 1, febrero, 2010, pp. 203-229 Universidad de Salamanca Salamanca, España

BENÍTEZ, D., & Castañeda, L. (2005). La influencia de la percepción en la construcción de conjeturas geométricas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

CAPÍTULO 3: EXPERIENCIAS SIGNIFICATIVAS EN BACHILLERATO

El tercer capítulo del Libro Experiencias significativas en Educación Matemática presenta tres trabajos del nivel de Bachillerato. Dos de estos trabajos se realizaron en una institución privada y el tercero en una institución pública de la ciudad de Santiago de Cali en Colombia.

El objetivo del trabajo titulado Resortes concepto de Función y modelación es indagar sobre la aproximación de los conceptos de función y modelación se aplica a un grupo de 30 estudiantes de 9 grado del Colegio Berchmans de la ciudad de Cali. Esta actividad corresponde a la implementación en el aula de las competencias trabajadas en el diplomado "Diseño de ambientes de aprendizaje mediados por GeoGebra" ofrecido por la universidad ICESI en colaboración con el Instituto GeoGebra Cali. Durante la investigación los estudiantes resolvieron problemas que se modelan con funciones lineales a partir de una situación de variación de cantidades. Para ello, identificaron las variables dependientes e independientes en una relación entre dos cantidades e implementaron función lineal para modelar situaciones de variación y realizaron representación gráfica y algebraica, además de tabular funciones lineales de las situaciones planteadas . Las actividades se desarrollaron en contexto real.

El segundo trabajo tiene por título Una actividad de generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico. En él se documenta una experiencia de aula con estudiantes de grado octavo del Colegio Berchamns de la ciudad de Cali, mediada por el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. El análisis se centra en identificar los procesos de razonamiento y comunicación empleados por los estudiantes para abordar actividades de generalización en contextos geométricos. La experiencia permite validar el uso de procesos de generalización como un medio para facilitar la transición al pensamiento algebraico, dejando evidencia de la capacidad de los estudiantes para identificar patrones, regularidades y expresiones generales que pueden ser comunicadas usando registros como el de la lengua natural, el tabular o el simbólico. La actividad se desarrolló en contexto formal.

El tercer artículo se titula El diseño de un ambiente de aprendizaje, a partir del software GeoGebra, de los elementos de una función lineal con estudiantes de grado octavo. Este trabajo se centra en analizar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de octavo grado de una Institución educativa del sector Público de Cali, a partir de varias actividades en el que ellos desarrollan el concepto de función mediado con el software de GeoGebra, el cual permite a los estudiantes una exploración, visualización y manipulación de la relación de los objetos matemáticos con un contexto social o real. En este trabajo se realizó un análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes para razonar matemáticamente y así desarrollar de las actividades propuestas. Las actividades se desarrollaron en contexto hipotético.

EXPERIENCIA 1

Resortes concepto de función y modelación

MANUEL ALBERTO MARINEZ CASTILLO
JULIÁN ENRIQUE CÓRDOBA
HEVERT MARIN CASTILLO

RESUMEN

El objetivo es indagar la aproximación de los conceptos de función y modelación se aplica a un grupo de 30 estudiantes de 9° del Colegio Berchmans, perteneciente a la Compañía de Jesús. Esta actividad corresponde a la implementación de las competencias trabajadas en el diplomado "Diseño de ambientes de aprendizaje mediados por GeoGebra" dictado por la universidad ICESI en colaboración con el Instituto GeoGebra Cali. Durante la investigación los estudiantes resolvieron problemas que se modelan con funciones lineales a partir de una situación de variación de cantidades. Para ello, identificaron las variables dependientes e independientes en una relación entre dos cantidades e implementaron función lineal para modelar situaciones de variación y realizaron representación gráfica, algebraica y tabular funciones lineales de las situaciones planteadas.

¿EN DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO Y LAS CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN?

El desarrollo de las actividades para la aproximación de los conceptos de función y modelación se llevó a cabo en la jornada de la mañana en el Colegio Berchmans, el cual está ubicado en el barrio El Retiro en el sector de Pance, de la Comuna 22 de la ciudad de Cali. En el colegio estudian los alumnos desde prescolar hasta grado 11. La investigación se realizó durante el primer periodo del año lectivo 2019.

La comunidad escolar que participó en este estudio estuvo conformada por los estudiantes del grado 9 de básica secundaria de la institución. El grupo era mixto, con edades que oscilaban entre los 13 y los 16 años. Estos estudiantes presentaban un nivel bajo de reprobación y de deserción escolar. De otra parte, el grupo objetivo tenía un nivel básico en el uso de computadores y bases mínimas de Geometría, además, carecían de alguna fundamentación sobre el uso del *software* GeoGebra.

Respecto al contexto familiar, el 65 % de los alumnos conviven con familias tradicionales, el 35 % de ellos forman parte de familias disfuncionales.

El 70 % de los estudiantes habitan en viviendas o apartamentos propios y el 30 % viven en casas o apartamentos alquilados. Los estudiantes en su mayoría están cerca de la institución, que corresponden a los estratos socioeconómico 5 y 6, es decir, gran parte de las familias tiene un empleo u otra fuente de ingresos permanente que les posibilitan un nivel de vida cómodo. Las viviendas están construidas en material y cuentan con los servicios básicos de agua potable, energía, gas natural domiciliario e internet.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

En este artículo se expresan los resultados de la investigación didáctica en educación media “grado noveno”. Las actividades de esta indagación se desarrollan en los siguientes pensamientos: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, estos pensamientos se vinculan con los procesos de razonamiento, resolución y planteamiento de problemas, comunicación y modelación, y el planteamiento de situaciones problemas. Se manifiestan las conjeturas, procedimientos y deducciones de los estudiantes del colegio Berchmans de Cali en relación con los procesos de generalización y modelación del concepto de función (particularmente la función lineal) a través de una práctica de laboratorio ley de Hook, donde luego confrontaron sus planteamientos con las representaciones que suministra GeoGebra.

En esta investigación se plantearon tanto las actividades de aprendizaje como el rol del profesor, y las estrategias utilizadas por los estudiantes que los llevaron concretar el concepto de función y sus características. Al término de la actividad se puedo establecer que los estudiantes plantearon la expresión algebraica y modelaron el alargamiento de un resorte dependiendo de la variación de las masas, así como su verificación de la representación gráfica en GeoGebra.

El artículo tiene como propósito central documentar una implementación didáctica concreta en la que el profesor desarrolla un ambiente de aula e implementa una metodología que le permitió a los estudiantes participar de manera activa en la construcción y validación de conjeturas. El concepto de función tiende a ser uno de los objetos matemáticos que mayor dificulta genera a los estudiantes al momento de explicarlo y ponerlo en contexto, es por eso que se propuso esta investigación con la finalidad que ellos puedan tener la aproximación a dicho conceptos desde una perspectiva práctica, dinámica y constructiva. De ahí que este trabajo se enmarque en un proyecto de investigación que tiene como propósito contribuir al desarrollo de la competencia de resolución de problemas en estudiantes de Educación Media.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

El proyecto se estructuró en dos partes: supuestos teóricos y diseño metodológico.

Supuestos teóricos

Los supuestos teóricos –resolución de problemas de matemáticas, tecnología digital en educación matemática y material manipulativo– que sirvieron de soporte a la investigación se describen de manera concreta a continuación.

Resolución de problemas. Schoenfeld (1985) realizó varios estudios con los alumnos y matemáticos profesionales. En todos ellos encontró evidencias para afirmar que existen cuatro dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas: (a) estrategias cognitivas, (b) dominio del conocimiento, (c) estrategias metacognitivas y (d) sistema de creencias.

Estrategias cognitivas. Son métodos heurísticos, tales como descomponer el problema en casos especiales, invertir el problema, establecer subtemas y relajar las condiciones, entre otras. Las heurísticas son acciones que pueden ser de utilidad para resolver problemas. Son consideradas estrategias y técnicas para un avance en el proceso de solución. Polya (1965) plantea solución a las heurísticas por medio de preguntas y sugerencias que realiza un resolutor ideal. Las siguientes son algunas de ellas: ¿pueden pensar en un problema análogo, un tanto más accesible? ¿Pueden enunciar el problema en forma diferente? ¿De qué manera se pueden cambiar los datos o las condiciones en las que está redactado el problema?

Dominio del conocimiento. Una cualidad relevante en el desempeño de un resolutor exitoso de problemas es el desarrollo de una base amplia de conocimientos de matemáticas. En esta dimensión se estudian los recursos matemáticos con los que cuenta el estudiante para la resolución de un problema. Aquí se pueden elaborar preguntas que sirven de base para esclarecer las características de la dimensión: ¿cuáles son las herramientas que tiene un resolutor a su disposición? ¿Qué información relevante tiene a mano para resolver la situación problemática? ¿Cómo accede a esa información y cómo la utiliza?

Estrategias metacognitivas. En el curso de una actividad intelectual, el análisis de la marcha del proceso desempeña un papel central. El monitoreo y el control del progreso de la solución son componentes de la metacognición. Este tipo de estrategias se refieren a las decisiones globales respecto al entendimiento del problema, y a la selección e implementación de recursos y estrategias; también incluye acciones como planear, evaluar y decidir.

Sistema de creencias. Generalmente, los estudiantes tienen un conjunto de creencias acerca de lo que significa hacer matemáticas y sus objetos específicos. Es conveniente hacer la siguiente reflexión: ¿cómo afectan tales creencias el desempeño de los alumnos en la resolución de problemas? En esta dimensión se ubican las creencias que el individuo tiene de las matemáticas y de sí mismo. Las creencias determinan la manera como aborda una persona el problema, por ejemplo, las técnicas que emplea o evita, y el tiempo que le dedica al estudio. De lo anterior se puede afirmar que "las creencias establecen el marco bajo el cual se utilizan los recursos, las heurísticas y el control" (Schoenfeld, 1985, p. 45).

Función matemática y modelación matemática. Dos conceptos determinantes para el trabajo, desarrollo, interpretación y explicación de algunos conceptos de la matemática, en la cual se presentan muchas situaciones de la cotidianidad. A través de la historia se han dado múltiples definiciones que han evolucionado conforme la especificidad de algunos temas tratados y sus posibles mediaciones tecnológicas. Estos conceptos son de amplia aplicación en diferentes campos del conocimiento. A continuación, se cita uno de los conceptos de función. Larson y Hostetler (2001) dicen que:

- Las funciones comúnmente están representadas en cuatro formas:
- Verbalmente, por una oración que describe la variable de entrada está relacionada a la variable de salida.
- Numéricamente, por una tabla o lista de pares ordenados que hace corresponder un valor de entrada con un valor de salida.
- Gráficamente, por puntos sobre una gráfica en un plano coordenado en el cual los valores de entradas son representados por el eje horizontal y los valores de salida por el eje vertical.
- Algebraicamente, por una ecuación de dos variables.

Los cuatro ítems planteados en la anterior definición los aplican los estudiantes en el desarrollo de este trabajo. Para la implementación consciente del concepto de modelación es recomendable que el estudiante tenga una muy buena aproximación a la comprensión del concepto de función (teniendo presente que este es de los conceptos u objetos matemáticos con alto nivel de dificultad para comprenderlo).

Freudenthal (1980) señaló que la perspectiva correcta se da principalmente a partir del medio ambiente hacia las matemáticas y no en la otra dirección. No se debe considerar, primero, hacer las matemáticas y después regresar al 'mundo real', sino el mundo real primero, y después la matematización.

Para (Larson & Hostetler, Precalculus, 2001, p. 20) Citados por (Planchart Márquez).

> El mundo real ¿qué significa? perdonen esta expresión descuidada. Al enseñar a matematizar el 'mundo real' está representado por un contexto significativo que involucra un problema matemático. 'Significativo' por supuesto que quiere decir significativo para quienes aprenden. Las matemáticas deberían ser enseñadas dentro de contextos y a mí me gustaría que las matemáticas más abstractas fueran enseñadas dentro de los contextos más concretos.

Se pretende que al desarrollar esta actividad los estudiantes adquieran y potencien sus desempeños en relación con la lectura, interpretación, planteamiento de heurísticas, resolución y explicación de problemas que vinculan conceptos de función, y que deban modelar. Las TIC se utilizan fundamentalmente como instrumentos mediadores de la interacción entre los estudiantes y los contenidos con el fin de facilitar a los primeros el estudio, memorización, comprensión, aplicación, generalización, profundización, etc., de los segundos (Coll et al., (2007).

La mediación de los recursos tecnológicos tales como papel, regla, lápiz y computador, son preponderante en el desarrollo de esta actividad, puesto que son los principales recursos que complementan la apropiación conceptual del concepto de modelación: "cambios importantes en la organización tanto administrativa, como de los materiales y sistemas de comunicación y mediación; requiriendo modelos pedagógicos nuevos y un fuerte apoyo de tecnologías multimedia interactivas" (Salinas Ibañez, 2004).

En muchas actividades humanas utilizamos instrumentos tecnológicos: un celular con aplicaciones que nos orientan en el tráfico de una ciudad, una tableta para buscar información o un computador para resolver un problema. Los instrumentos que utilizamos en cada caso para lograr mediación cognitiva no solo han aumentado nuestra capacidad cognitiva, sino que también la han reestructurado. En síntesis, los instrumentos amplifican el dominio de recursos y habilidades, y nos ayudan a resolver los problemas de manera diferente a la utilizada en el universo del lápiz y el papel.

La implementación de los instrumentos tecnológicos han potenciado las investigaciones y resultados en diferentes áreas de conocimientos y campos de investigación tales como la Astronomía, donde "se amplificó la identificación de galaxia y planetas"; en Biología "los resultados en análisis de materia, moléculas, bacterias y microorganismos han aumentado impresionantemente"; en la Educación, particularmente en Educación Matemática, ha sido de incomparable importancia el desarrollo e implementación de la geometría dinámica, gran número de operaciones por minuto que procesan diferentes software, el desarrollo y aplicación de diferentes tipos de algoritmos, entre muchas otras más.

Se tienen indicios para pensar que cuando se trabaja con la ayuda de las herramientas tecnológicas en la solución de un problema de matemáticas algunos componentes del pensamiento matemático se ejecutan de manera distinta que cuando el problema se resuelve únicamente con lápiz y papel. En la experiencia de resolver problemas con la ayuda de GeoGebra, los estudiantes pueden desarrollar procesos del pensamiento geométrico para particularizar, visualizar, construir patrones, conjeturas y contraejemplos a través de varias acciones como el trazo de objetos geométricos, la prueba del arrastre, la medición, el lugar geométrico y la utilización de diferentes registros de representación, en el sentido que lo maneja (Duval, 1999).

GeoGebra es un software de Geometría Dinámica interactivolibre, como un micromundo computacional. Esto quiere decir que este instrumento de mediación tiene un conjunto de objetos con relaciones que permite realizar operaciones y contiene una serie de fenómenos como el arrastre, el movimiento, los lugares geométricos, el uso de diversas representaciones semióticas y la realización de macroconstrucciones. Con este instrumento de mediación se pueden ejecutar varias acciones cognitivas como visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación.

Modelación. El software de geometría dinámica es un magnífico aleado en los procesos de modelación, puesto que permite mostrar el fundamento de estudio como una réplica simplificada de la realidad y la teoría con el fin de ayudar a comprender leyes y teorías, donde la modelación se puede considerar como un puente de tránsito entre el investigador y el objeto de investigación.

Visualización. El ambiente de geometría dinámica le permite a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades, visualizarlas y transformarlas. Dicho proceso contribuye a desarrollar el hábito de transformar los casos particulares para buscar visualmente las variantes e invariantes de la construcción y la justificación formal de las conjeturas.

Experimentación. Además de la visualización, el software dinámico ayuda a los estudiantes a experimentar por medio de la construcción de casos particulares para explorar casos adversos y situaciones extremas. En dichos ejemplos, los alumnos pueden medir, comparar y hacer trazos auxiliares. La información obtenida en la experimentación puede ayudar a construir conjeturas, a confrontar con sus equivalentes realizados con lápiz y papel.

Durante este proceso de experimentación, los estudiantes se interrogan y anticipan posibles o futuros resultados, entre ellas se puede reconocer: (a) expresen sus predicciones con claridad, (b) tengan cuidado al construir sus propias predicciones, y (c) creen expectativas y motivaciones para la experimentación real. En la experimentación, los estudiantes pueden encontrar situaciones que contradigan sus predicciones, lo que los ubica en dirección de la reflexión, revisión y restauración de los planteamientos.

OBJETIVO DE LA INVESTIGACIÓN

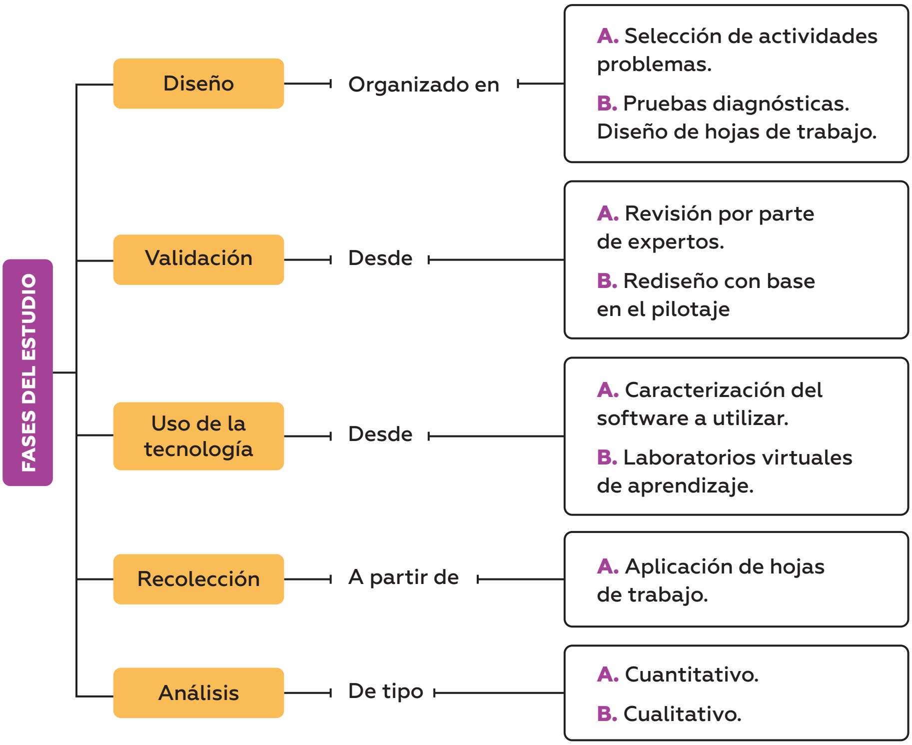
Como objetivo general de la hoja de trabajo se busca que los estudiantes puedan resolver problemas que se modelan con funciones lineales. Para lograr dicho objetivo consideran los siguientes objetivos específicos:

- Identifica con claridad variables dependientes e independientes en una relación entre dos cantidades.
- Emplea la función lineal para modelar situaciones de variación.
- Representa gráfica, algebraica y tabular funciones lineales.

DISEÑO METODOLÓGICO

En esta sección se exponen los pasos que se siguieron durante el desarrollo de la investigación en las diferentes fases: diseño, validación, uso de tecnología, recolección y análisis de resultados. Las fases implementadas fueron las sugeridas en la tesis doctoral de Benitez (2006). Las actividades importantes en cada fase se presentan de forma sintética en la Figura 1. Más adelante se hace una descripción particularizada de cada actividad.

FIGURA —— 1
Fases del estudio



Fuente: Benitez (2006).

Diseño. En esta fase se exponen dos momentos: el primero alude a la selección de actividades o problemas, los cuales serán estructurados a la luz de los estándares básicos de competencia en matemática propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017), para el grado noveno de la educación media. Lo anterior posibilita la implementación de la hoja de trabajo, la que se consolida más adelante.

Validación. En la hoja de trabajo se presentaron las siguientes instancias: (a) revisión del director y el codirector del proyecto de trabajo de grado, y (b) identificación de docentes que tuvieran conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC, en la resolución de problemas matemáticos y en la construcción de conjeturas. Los anteriores pasos se realizaron con el fin de mejorar y elaborar hojas de trabajo que dieran cuenta de la investigación objeto de estudio.

Uso de tecnología. Consiste en exponer a los estudiantes algunas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra (Benitez, 2006). En esta fase se implementaron las siguientes acciones: (a) una descripción global del software, y (b) un taller de manejo del mismo, usando la vista gráfica y la hoja de cálculo para la solución de problemas relacionados con registro tabular y gráficas de sus ejes.

- Descripción global del software: se mostraron las características más importantes de GeoGebra, las funciones, los comandos principales y la forma de operarlos en relación con la vista gráfica y la hoja de cálculo.
- Taller de manejo del software: se implementó con los estudiantes un taller de una hora con el objetivo de que resolvieran una serie de actividades sobre el manejo básico de cada herramienta de GeoGebra. El profesor estuvo pendiente de las inquietudes que los estudiantes pudieron tener en el proceso.

Recolección. Se utilizaron las hojas de trabajo como instrumento de recolección, el cual abarcaba diferentes preguntas con un espacio suficiente para que los estudiantes comunicaran sus ideas por escrito. En este taller se evidenció la capacidad que ellos tienen para conjeturar. Algunos de los cuestionamientos estuvieron basados en un contexto realista o hipotético. Cabe mencionar que la propuesta de trabajo se abordó tanto de manera individual como en equipo.

Durante la puesta en escena de las hojas de trabajo sobresalieron tres etapas: (a) trabajo individual, (b) acompañamiento del docente investigador y (c) reformulación de contextos.

- *Trabajo individual*: en esta etapa el estudiante se confronta al problema de manera individual con apoyo del docente o de otro par.
- *Acompañamiento del docente investigador*: en esta etapa la intervención del maestro es para formular cuestionamientos y brindar sugerencias que permitan al estudiante aproximarse a la solución del problema.
- *Reformulación de contextos*: este espacio le brinda la oportunidad al estudiante a enfrentarse a problemas parecidos, pero en diferentes contextos, es decir, que sea capaz de sostener un vínculo con el problema original, pero aumentando algunas características que le posibiliten explorar nuevos dominios.

Fase de procesamiento. Después de recoger la información se procedió a archivarla de forma física y electrónica. Se realizaron archivos con las hojas de trabajo. Las actividades fueron clasificadas en carpetas, las cuales se marcaron con el título de la hoja de trabajo y la fecha de aplicación. De igual manera, se conservaron, nombraron y guardaron los archivos electrónicos elaborados por los estudiantes en los portátiles, con ayuda del software de GeoGebra, además de fotografías y videos. Una vez guardados los archivos, se procedió a elaborar las tablas y las gráficas, según las categorías de análisis. En lo cuantitativo se emplearon las siguientes categorías: correcto, incorrecto y no contestó (ver Anexo B). Esta última no se caracterizó debido a que todos los estudiantes contestaron cada una de las preguntas. En cuanto a lo cualitativo, se utilizaron las categorías de acuerdo con el tipo de recursos y estrategias utilizadas por los estudiantes participantes.

Análisis de resultados. Una vez recogida la información, se procedió a analizarla con base en los desarrollos cualitativos y cuantitativos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos fue posible entregar la respuesta a las preguntas planteadas en la investigación, las cuales marcaron el derrotero para la realización del trabajo. Por otro lado, se pudo evaluar el impacto de las actividades propuestas a los participantes en el salón de clase.

Esta fase del estudio se efectuó con base en los referentes planteados de investigación, con lo que se esperaba constatar que, en el marco de la resolución de problemas, el uso de material manipulativo y de tecnología digital juegan un papel preponderante al interior del aula de clase, puesto que posibilitan el progreso de la capacidad del estudiante para construir conjeturas.

FASES Y MATERIALES DEL DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

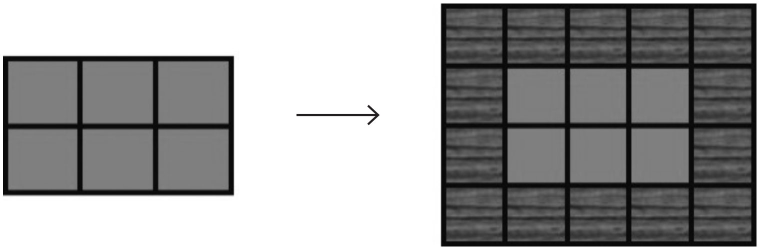
Los materiales que se utilizaron para la investigación se constituyeron en tres fases: a) material orientado al diagnóstico y aproximación de los procesos de generalización; b) práctica en laboratorio de física; y c) confrontación virtual softwares (GeoGebra y Universidad de Colorado)

a. Material orientado al diagnóstico y aproximación de los procesos de generalización

El borde de la piscina

Un estudiante de arquitectura quiere determinar cuánto espacio podría tener a su disposición para ubicar sillas para tomar el sol en el borde de una piscina de forma rectangular. Para esto, necesita saber cuántos metros cuadrados hay al borde de esta. La siguiente es la representación de la piscina, cada cuadro es de 1 m^2.

IMAGEN —— 1
Ilustración inicial del planteamiento del borde de la piscina



Fuente: elaboración propia (2021).

Cada grupo de trabajo propone un tamaño de piscina diferente, y determina cuántos metros cuadrados hay en el borde. Todos estos valores son registrados en una tabla como esta.

LARGO	ANCHO	TAMAÑO DEL BORDE

IMAGEN —— 2
Planteamiento a la solución del problema "borde de la piscina"

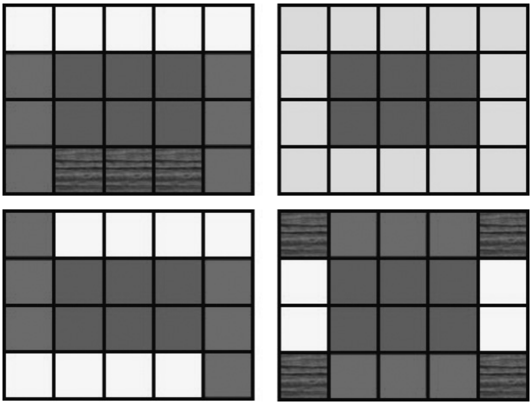
Fuente: elaboración propia (2021).

Se les invita a los estudiantes a que vean si pueden encontrar una regla para determinar la medida del borde para cualquier tamaño de piscina sin necesidad de hacer un dibujo para esto. La actividad permitió que los estudiantes pudieran establecer patrones y generalizaciones.

Aquí fue muy interesante el resultado obtenido, pues de los estudiantes que trabajaron esta actividad tan solo el 13 % (4 estudiantes) de un grupo de 30 estudiantes del grado noveno no pudo encontrar la expresión que determinaba la cantidad de cuadrados que se podían poner en el borde de la piscina.

Fue muy importante para los estudiantes darse cuenta de que pudieron encontrar el modelo de la cantidad de metros cuadrados necesarios, para ello la representación simbólica fue fundamental. Al ver la imagen de los dibujos que representaron, los estudiantes pudieron encontrar el modelo de forma inmediata. A continuación, se muestran cuatro formas diferentes de encontrar el área del borde a partir del tamaño de la piscina.

IMAGEN —— 3
Ilustración de las formas que se puede dar respuesta al interrogante



Fuente: elaboración propia (2021).

Esto fortalece la idea de que es necesario utilizar diferentes sistemas de representación. Aquí la mayoría de los estudiantes optó por utilizar la última representación, donde la pudieron expresar como que posteriormente será: . "donde es el numero de cuadrados de la base y el numero de cuadrados de la altura y 4 son los el número de cuadrados constante". Fue muy importante este hallazgo, por lo que, este tipo de expresiones no la vieron como algo extraño, si no como el resultado de proceso racional-deductivo, lo cual cobra valor y tiene un sentido para ellos, y les dice algo; situación que no pasaba antes.

b. Práctica en laboratorio de física

Después del diagnóstico, aproximación a los modelos de generalización, los estudiantes pudieron consolidar una expresión algebraica que lograba modelar el problema planteado. En esta segunda fase los estudiantes se organizaron en 10 grupos de 3 estudiantes, cada uno, para realizar la actividad de forma práctica siguiendo la guía de laboratorio de la ley de Hooke[1], de la cual se enfocaron, como objetivo, el indagar la elongación que presenta un resorte a medida se van cambiando las masas que se les ubica en el extremo inferior. Estos valores los fueron registrando con la finalidad de determinar una expresión que pretenda modelar dicho comportamiento y, con esto, concluir la razón de cambio o constante de elasticidad que muestran dos resortes de diferentes materiales.

c. Confrontación virtual softwares (Universidad de Colorado y GeoGebra)

Se propone una hoja de trabajo donde el objeto importante aquí sigue siendo la modelación. Se pensó en un laboratorio virtual de masas y resortes (que se pueda contrastar con lo trabajado en el laboratorio); para ello utilizamos el que se encuentra en la Universidad de Colorado, el cual consiste en poner unas masas en unos resortes e ir midiendo la elongación de este. No decidimos profundizar en ley de Hooke, ya que no lo consideramos pertinentes por el trabajo diferencial que se tenía que hacer; es así que solo abordamos la relación que existe entre la elongación de un resorte cuando se le pone una masa en su extremo. Aquí los estudiantes tuvieron la oportunidad de trabajar de forma manual y ayudados con el aplicativo de GeoGebra (los estudiantes exploraron y trabajaron con la hoja de cálculo de Excel, donde registraron los valores de la masas y elongación de la hoja de trabajo para posteriormente realizar la regresión lineal, y con ella ubicar la recta de regresión en el plano cartesiano y la expresión general). Fue muy importante el trabajo que se hizo simultáneo con el software, ya que permitió que los estudiantes pudieran explorar otras formas de obtener los resultados, quedando muy conformes con la "regresión lineal", que hasta este momento era

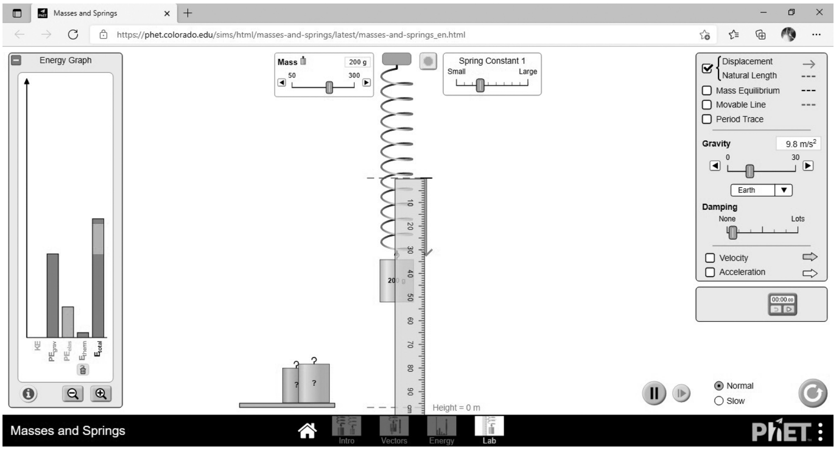
---

1. La ley de Hooke explica la relación entre la fuerza ejercida sobre un resorte, el estiramiento del resorte y la constante del resorte.

desconocido para ellos y más aún cuando ellos confrontaron esta gráfica con la que realizaron en el laboratorio de física e identificaron que la variación entre ellas, gráfica de laboratorio vs gráfica modelada en GeoGebra, fue poca.

IMAGEN —— 4

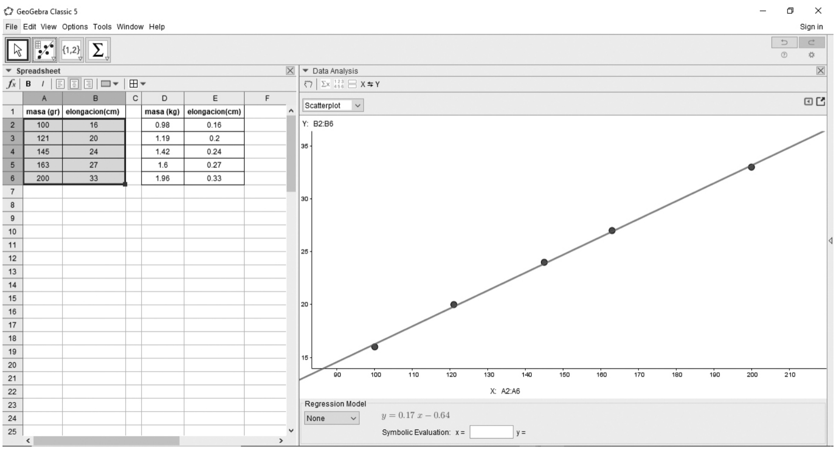
Ilustración del software de la Universidad de Colorado



Fuente: Universidad de Colorado (2021).

IMAGEN —— 5

Ilustración hoja de cálculo, masa, longitudes y modelación función lineal



Fuente: Elaboración propia (2021).

d. Asesoría, acompañamiento del docente

Durante todo este proceso, la intervención del maestro fue fundamental. Si bien es cierto que los estudiantes llegaron a las conclusiones por su propia intervención, también entendieron en qué consiste la "modelación en matemáticas", encontraron dichos modelos y mediante actividades de control determinaron la veracidad de los resultados obtenidos. Los estudiantes se apoyaban de las orientaciones iniciales suministradas por el maestro, donde ellos podían replicar lo realizado. Se les explicitó que esto puede generar dificultades en los resultados, ya que en los procesos de modelación no siempre se llega al modelo de la misma manera. Fue este elemento el que los impulsó a realizar un trabajo más autónomo y consciente.

La implementación de GeoGebra le permitió al docente identificar en los estudiantes el logro de los objetivos propuesto a través de las actividades. De otro lado, le brindó al alumno herramientas de tipo geométrico, algebraico y propias del cálculo para explorar y comprender propiedades fundamentales la modelación, resolución de problemas y representación gráfica, y poder pasar de una representación a otra de un mismo concepto, lo que lleva, según Duval (1999), a comprender realmente la estructura de los elementos matemáticos involucrados.

RESULTADOS DE LA HOJA DE TRABAJO (FUNCIÓN LINEAL "MASAS Y RESORTES")

La actividad de la hoja de trabajo se aplicó durante el desarrollo del primer periodo académico del colegio Berchmans (agosto 26 a noviembre 26 2019); esta permitió que los alumnos pudieran establecer la relación entre el cambio de masas de un resorte y la elongación que estas generaban al resorte, así como la inferencias, deducciones y conclusiones que ellos podían establecer.

A continuación, se listan las Instrucciones y requerimiento para el desarrollo de la hoja de trabaja (Anexo A).

- Colocar masas en el extremo del resorte y registrar la masa con la respectiva elongación que produce sobre el resorte.
- Determinar la razón de cambio o constante de elongación entre:

variación o cambio en la elongación del resorte “” y la variación o diferencia entre masas “”.

- Inferir y explicar por qué se da el concepto de constante, basado en lo realizado en los puntos 1 y 2.
- Analizar por qué a la razón de cambio se le puede identificar como constante.
- Utilizar los valores de masas y elongaciones para realizar una representación gráfica en el plano cartesiano.
- Establecer la ecuación que modela la elongación de un resorte en función de la masa que se le pueda ubicar en el extremo.
- Consultar el material que se relaciona con el valor de la constante de elasticidad del resorte.
- Realizar la actividad en GeoGebra, ubicar los datos registrados en la hoja de cálculo de Excel para realizar recta de regresión de los puntos registrados. Pegar en la hoja la gráfica resultante.
- Comparar los resultados obtenidos en la modelación de realizada con lápiz y papel vs el resultado de GeoGebra.
- Verificar el valor de la masa correspondiente a una elongación especifica a través de la ecuación general deducida.
- Conclusiones y generalidades del trabajo.

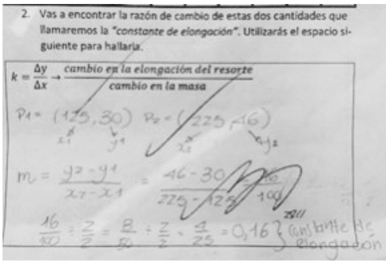
CONDICIONES DE DESARROLLO DE LA HOJA DE TRABAJO

Esta hoja de trabajo la respondieron 30 estudiantes (15 hombres [50 %] entre los 13 y los 16 años, y 15 mujeres [50 %] entre los 13 y los 15 años de edad). Se realizó por escrito y de forma individual. El docente reiteró y aclaró las dudas que surgieron de las instrucciones que estaban escritas en que cada una de las fases que se iban a desarrollar durante la investigación.

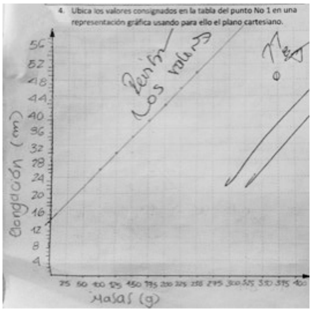
La hoja de trabajo fue aplicada a cada estudiante del 21 de octubre al 15 de noviembre de 2019. La primera parte en el laboratorio de Física del colegio (se utilizó: guía de laboratorio, soporte de resortes, masas, reglas, hoja, papel, calculadora), la segunda, en los computadores con el aplicativo de la Universidad de Colorado (se utilizó: hoja de trabajo, lápiz, papel, calculadora y software Universidad de Colorado (2020)); la tercera parte fue desarrollada en el software GeoGebra (se utilizó: hoja de trabajo, lápiz, papel, calculadora y cada estudiante en su computador con GeoGebra instalado),” y en la fase final se realizaron conclusiones y retroalimentación entre estudiantes y docente. Los alumnos cuentan con dominio del software GeoGebra para el desarrollo de la actividad que se propuso.

De la hoja de trabajo se seleccionaron los siguientes puntos para analizar. A estos se les asignaron los nombres consecutivos, desde la pregunta 1 hasta la pregunta 7. Se decide seleccionar estos puntos debido a que muestran una secuencia adecuada en términos de la aproximación a los conceptos de función y modelación matemática.

TABLA —— 1
Preguntas de la hoja de trabajo y análisis de las respuestas

HOJA DE TRABAJO	PREGUNTAS PARA ANALIZAR
Punto 2 	**Pregunta 1** De 30, 29 estudiantes calculan eficientemente la razón de cambio de la constante de elongación entre el cambio en la elongación respecto al cambio de masas. Un estudiante hizo el registro invertido, es decir, realizó el cambio en la masa respecto al cambio de la elongación del resorte en ejes contrarios. Al realizar la retroalimentación con los estudiantes se concluye que en el momento de determinar k, el estudiante presentó una equivocación en la interpretación en las variables.

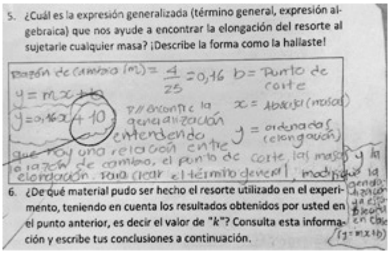
Punto 4



Pregunta 2

De 30, 24 estudiantes grafican adecuadamente los datos registrados en la tabla masa vs elongación.
Al realizar la retroalimentación con los estudiantes se concluye que dos estudiantes, en el momento de realizar los registros de la escala numérica, cambiaron por error los ejes de abscisas y el eje de la ordena. Cuatro estudiantes no hicieron una adecuada representación en el plano cartesiano de los valores registrados en la tabla.

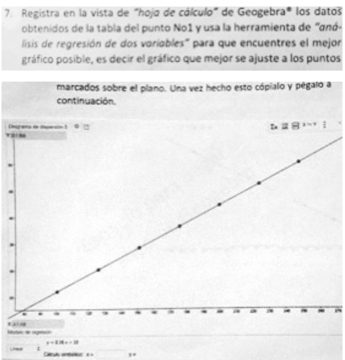
Punto 5



Pregunta 3

De 30, 24 estudiantes plantean la expresión o ecuación que generaliza la elongación de un resorte dependiente de una masa.
Al realizar la retroalimentación con los estudiantes, se concluye que tres estudiantes establecieron mal la constante de elongación del resorte, a dos estudiantes no les coincidía el termino independiente (el que corta el eje de la ordenada) y un estudiante no logró establecer la expresión generalizada o algebraica.

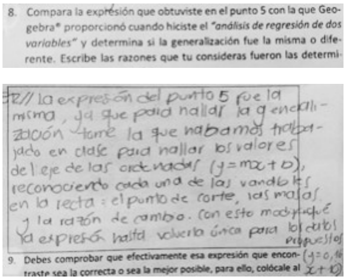
Punto 7



Pregunta 4

De 30, 29 estudiantes encuentran, a través de GeoGebra, el mejor gráfico que se ajusta a los puntos de la tabla previamente registrados en la hoja de cálculo. Un estudiante hizo el registro invertido, es decir, realizó el cambio en la masa respecto al cambio de la elongación del resorte en ejes contrarios. Al realizar el registro de estos valores en la hoja de cálculo de GeoGebra la recta de regresión que suministra GeoGebra es errada.

Punto 8


8. Compara la expresión que obtuviste en el punto 5 con la que Geogebra* proporcionó cuando hiciste el *"análisis de regresión de dos variables"* y determina si la generalización fue la misma o diferente. Escribe las razones que tu consideras fueron las determi-

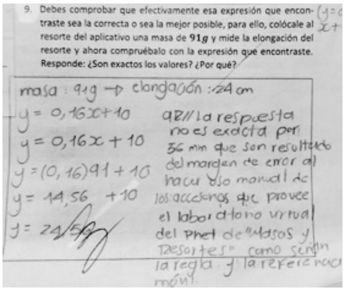
R// la expresión del punto 5 fue la misma, ya que para hallar la generalización tomé la que habíamos trabajado en clase para hallar los valores del eje de las ordenadas ($y=mx+b$), reconociendo cada una de las variables en la recta: el punto de corte, las masas y la razón de cambio. Con esto modifiqué la expresión hasta volverla única para los datos propuestos

9. Debes comprobar que efectivamente esa expresión que encontraste sea la correcta o sea la mejor posible, para ello, colócale al

Pregunta 5

De 30, 23 estudiantes concluyen adecuadamente que la ecuación que ellos determinaron en la pregunta 2 es similar a la ecuación de ajuste que arroja GeoGebra. Siete estudiantes tuvieron dificultades para concluir la similitud entre la expresión general que calcularon y la que GeoGebra suministró; las dificultades se relacionaron con: 1) identificar variables, 2) establecer escalas numéricas, 3) dificultades de plano cartesiano y 4) no establecer la expresión generalizada.

Punto 9


9. Debes comprobar que efectivamente esa expresión que encontraste sea la correcta o sea la mejor posible, para ello, colócale al resorte del aplicativo una masa de **91g** y mide la elongación del resorte y ahora compruébalo con la expresión que encontraste. Responde: ¿Son exactos los valores? ¿Por qué?

masa: 91g → elongación: 24 cm

$y = 0,16x+10$

$y = 0,16x + 10$

$y = (0,16)91 + 10$

$y = 14,56 + 10$

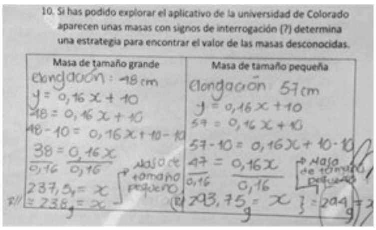
$y = 24,56$

R// la respuesta no es exacta por 56 mm que son resultado del margen de error al hacer uso manual de los accesorios que provee el laboratorio virtual del Phet de "Masas y Resortes" como son la regla y la referencia móvil.

Pregunta 6

De los 30, 24 estudiantes realizan adecuadamente la comprobación del resultado de la elongación "que suministra la aplicación virtual" al ubicar una masa específica con el resultado que obtienen al efectuar el cálculo con la expresión que ellos propusieron.

Punto 10


10. Si has podido explorar el aplicativo de la universidad de Colorado aparecen unas masas con signos de interrogación (?) determina una estrategia para encontrar el valor de las masas desconocidas.

Masa de tamaño grande	Masa de tamaño pequeña
elongación: 48 cm	elongación: 57 cm
$y = 0,16x + 10$	$y = 0,16x + 10$
$48 = 0,16x + 10$	$57 = 0,16x + 10$
$48 - 10 = 0,16x + 10 - 10$	$57 - 10 = 0,16x + 10 - 10$
$38 = 0,16x$	$47 = 0,16x$
$\frac{38}{0,16} = \frac{0,16x}{0,16}$	$\frac{47}{0,16} = \frac{0,16x}{0,16}$
$237,5 = x$ masa de tamaño pequeño	$293,75\,g = x$ masa de tamaño pequeño
R// $\approx 238\,g = x$	$\approx 294\,g$

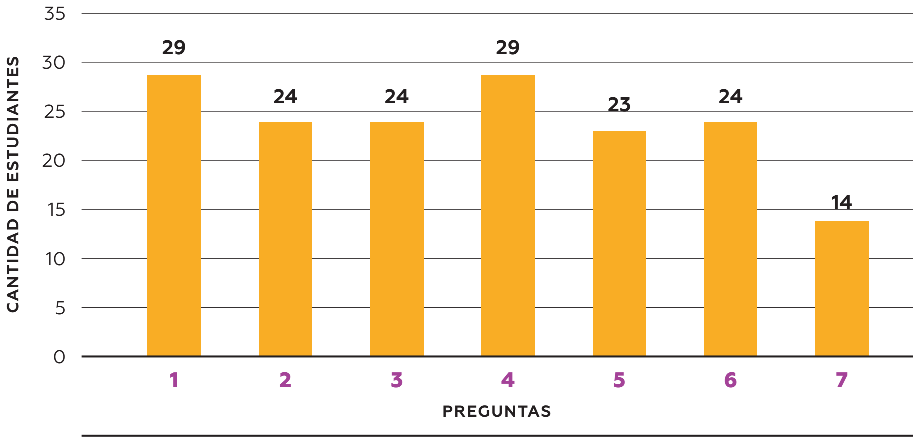
Pregunta 7

De 30, 14 estudiantes concluyen adecuadamente la masa interrogante que se debe determinar al aplicar el aplicativo de la Universidad de Colorado.

Dieciséis de los estudiantes no concluyeron adecuadamente la masa correspondiente o solicitada, algunos por dificultades en el momento de despejar la variable independiente y otros al aplicar la expresión generalizada "pues, esta estaba errada".

A continuación, se ilustra un gráfico de barras que muestra las respuestas marcadas por parte de los estudiantes en la hoja de trabajo, la tabla de los resultados se muestra en el Anexo B.

GRÁFICO —— 1
Gráfico de barras de respuestas correctas por parte de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia (2021).

CONCLUSIONES

Los estudiantes establecieron la expresión algebraica y modelaron el alargamiento de un resorte dependiendo de la variación de las masas.

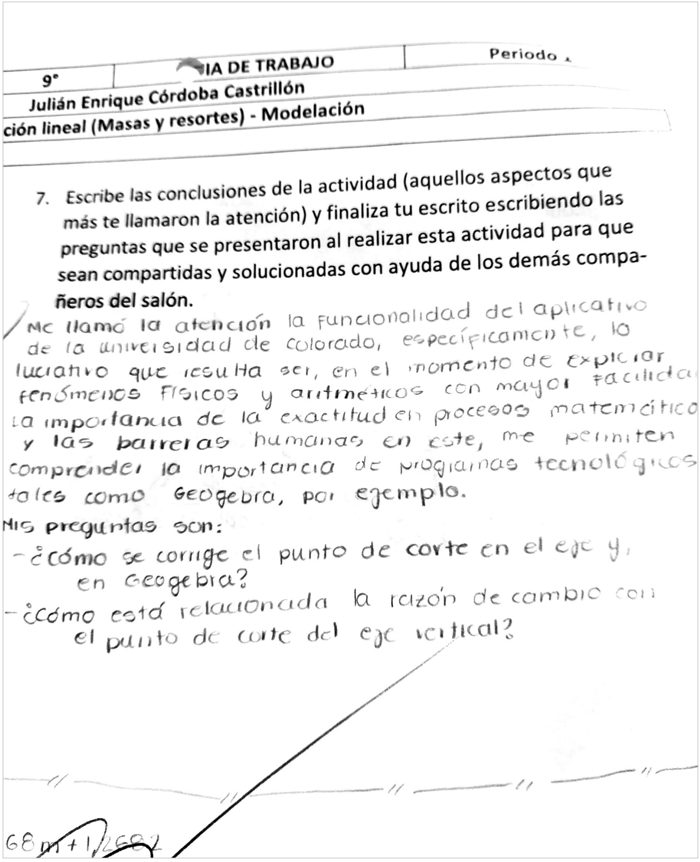
- Calcularon e identificaron la elongación del resorte "variable dependiente" al ubicar en el extremo del resorte una masa específica "variable independiente".
- Establecieron la razón de cambio (constante de elongación) del término independiente (longitud inicial del resorte) y la función lineal "", la cual emplearon para modelar la situación planteada.
- Implementaron los siguientes sistemas de representación: gráfico, algebraico y tabular para desarrollar la situación planteada "elongación del resorte dependiendo de una masa".

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

- El trabajo permitió que los estudiantes pudieran acceder al conocimiento de una forma diferencial gracias a la incorporación de GeoGebra y el software de la Universidad de Colorado. Será importante que se generen en los estudiantes espacios de familiarización con estos softwares en futuras actividades.

IMAGEN —— 6

Respuesta por parte de estudiantes



IA DE TRABAJO | Periodo

9° | Julián Enrique Córdoba Castrillón

ción lineal (Masas y resortes) - Modelación

7. Escribe las conclusiones de la actividad (aquellos aspectos que más te llamaron la atención) y finaliza tu escrito escribiendo las preguntas que se presentaron al realizar esta actividad para que sean compartidas y solucionadas con ayuda de los demás compañeros del salón.

Me llamó la atención la funcionalidad del aplicativo de la universidad de colorado, específicamente, lo lucrativo que resulta ser, en el momento de explicar fenómenos físicos y aritméticos con mayor facilidad, la importancia de la exactitud en procesos matemáticos y las barreras humanas en este, me permiten comprender la importancia de programas tecnológicos tales como Geogebra, por ejemplo.

Mis preguntas son:

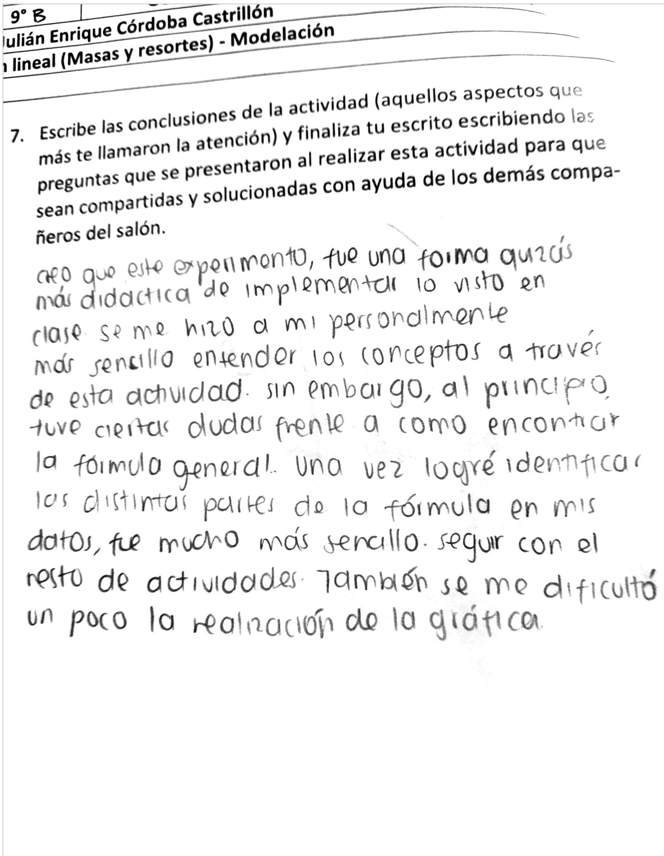
- ¿Cómo se corrige el punto de corte en el eje y, en Geogebra?
- ¿Cómo está relacionada la razón de cambio con el punto de corte del eje vertical?

68 m+1,2682

Fuente: Elaboración propia (2021).

- Es importante fortalecer con los estudiantes las propiedades y práctica del despeje de variables en ecuaciones o funciones de primer y segundo grado.
- Se recibieron unos estudiantes muy inquietos por descubrir la importancia de las matemáticas y otros inconformes con el proceso del área. Al finalizar esta ruta de aprendizaje y después de la intervención, se escuchan voces de satisfacción frente al objetivo del conocimiento de las matemáticas.

IMAGEN —— 7
Respuesta por parte de estudiantes


9° B
Julián Enrique Córdoba Castrillón
lineal (Masas y resortes) - Modelación

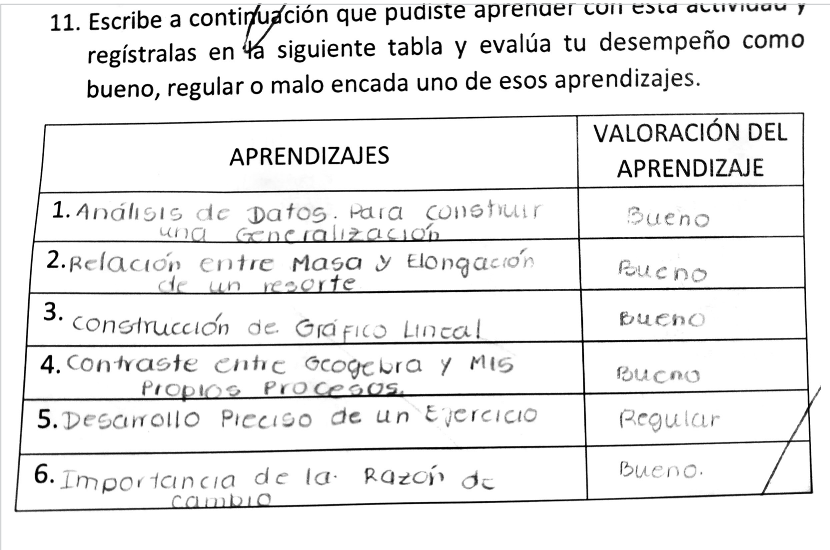
7. Escribe las conclusiones de la actividad (aquellos aspectos que más te llamaron la atención) y finaliza tu escrito escribiendo las preguntas que se presentaron al realizar esta actividad para que sean compartidas y solucionadas con ayuda de los demás compañeros del salón.

creo que este experimento, fue una forma quizás más didactica de implementar lo visto en clase. se me hizo a mi personalmente más sencillo entender los conceptos a través de esta actividad. sin embargo, al principio tuve ciertas dudas frente a como encontrar la fórmula general. Una vez logré identificar los distintas partes de la fórmula en mis datos, fue mucho más sencillo. seguir con el resto de actividades. También se me dificultó un poco la realización de la gráfica.

Fuente: Elaboración propia (2021).

- Los estudiantes lograron identificar los elementos básicos de la función lineal y son capaces de identificar con claridad, en su mayoría, las variables dependientes e independientes del comportamiento.

IMAGEN —— 8
Respuesta por parte de estudiantes



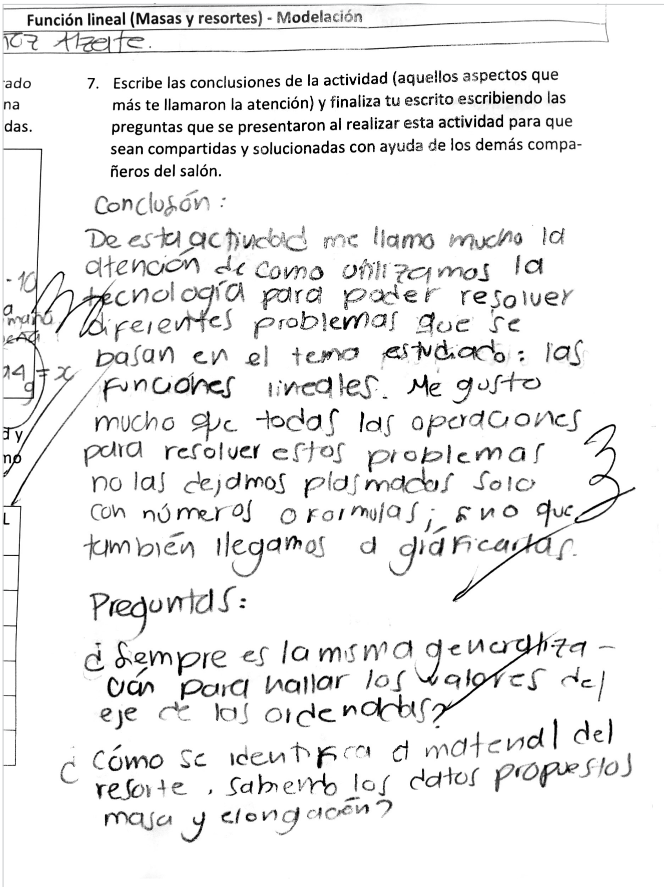
11. Escribe a continuación que pudiste aprender con esta actividad y regístralas en la siguiente tabla y evalúa tu desempeño como bueno, regular o malo encada uno de esos aprendizajes.

APRENDIZAJES	VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE
1. Análisis de Datos. Para construir una Generalización	Bueno
2. Relación entre Masa y Elongación de un resorte	Bueno
3. construcción de Gráfico Lineal	bueno
4. Contraste entre Geogebra y Mis Propios Procesos.	Bueno
5. Desarrollo Preciso de un Ejercicio	Regular
6. Importancia de la Razón de cambio	Bueno.

Fuente: Elaboración propia (2021).

- Comprenden de manera efectiva la intención de la modelación y la ponen a servicio de la situación que están resolviendo.

IMAGEN —— 9
Respuesta por parte de estudiantes


Función lineal (Masas y resortes) - Modelación

7. Escribe las conclusiones de la actividad (aquellos aspectos que más te llamaron la atención) y finaliza tu escrito escribiendo las preguntas que se presentaron al realizar esta actividad para que sean compartidas y solucionadas con ayuda de los demás compañeros del salón.

Conclusión:
De esta actividad me llamo mucho la atención de como utilizamos la tecnología para poder resolver diferentes problemas que se basan en el tema estudiado: las funciones lineales. Me gusto mucho que todas las operaciones para resolver estos problemas no las dejamos plasmadas solo con números o formulas; sino que también llegamos a graficarlas.

Preguntas:
¿Siempre es la misma generaliza-ción para hallar los valores del eje de las ordenadas?
¿Cómo se identifica el material del resorte, sabiendo los datos propuestos masa y elongación?

Fuente: Elaboración propia (2021).

- Quedó pendiente transversalizar este trabajo con el área de física, de tal manera que se pueda llegar a concretar este trabajo en relación completa con el laboratorio de la ley de Hooke.
- Los estudiantes participaron de forma dinámica durante todo el proceso e investigación, mejoraron su actitud frente al área, se ven más comprometidos frente a los trabajos propuestos y con actividades interactivas que vinculen elementos teóricos y prácticos en concreto, donde ellos tengan que hacer, construir y verificar.

APRENDIZAJES POR PARTE DEL PROFESOR

La hoja de trabajo fue un elemento de mucha ayuda para la finalidad de la investigación, pues permitió orientar y organizar la actividad en sus diferentes momentos. El papel del profesor articuló oportunamente el trabajo con la hoja de trabajo, los softwares GeoGebra y Universidad de Colorado, y la práctica de laboratorio, donde llevó a que la participación de los estudiantes fuera activa y motivadora.

Los registros de representaciones semióticas tales como visuales, tabulares y gráficos, permitieron una aproximación espontánea al concepto de modelación de la función lineal.

La implementación de las actividades prácticas que se confrontan con elementos teóricos suministra a los estudiantes seguridad al ir reconociendo resultados casi idénticos en otros registros y momentos de la actividad, aportando a la construcción de conocimientos matemático.

Es indispensable la organización, planificación, preparación, revisión y ajustes de las actividades y tiempos de desarrollo por parte del profesor con anticipación; esta gestión previa ayuda a disminuir las dificultades que siempre suelen resultar durante el proceso didáctico, pedagógico, conceptual y práctico del conocimiento matemático.

ANEXOS

ANEXO — A
Hoja de trabajo

	Área:	Matemáticas	Grado:	9°	GUIA DE TRABAJO	Periodo 1
	Profesores:	Julián Enrique Córdoba Castrillón				
	Tema:	Función lineal (Masas y resortes) - Modelación				
	Nombre:					

ESTÁNDAR: Resuelve problemas que se modelan con funciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales

Criterios de evaluación:

1. Identifica con claridad variables dependientes e independientes en una relación de dos cantidades o magnitudes.
2. Emplea la función lineal para modelar situaciones de variación.
3. Representa gráfica, algebraica y tabularmente funciones lineales.

ACTIVIDAD.

Para realizar este trabajo se sugiere trabajar en la página web: https://phet.colorado.edu. Aquí buscaremos el laboratorio de "masas y resortes", lo puedes encontrar en el vínculo de "física". Una vez ahí vas a explorar la introducción para que aprendas a manejar el aplicativo, una vez consideres necesario iniciarás el laboratorio. Antes de iniciar debes de ajustar algunas cosas. En tu caso, trabajarás solamente con el resorte en el ***SEGUNDO NIVEL*** de la constante de resorte, tus compañeros trabajarán con diferentes resortes.

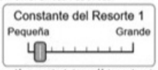


Ilustración tomada de https://phet.colorado.edu

Vas a modificar el valor de la masa como tú quieras y aquí lo puedes hacer.

Ilustración tomada de https://phet.colorado.edu

Te sugiero que actives estas dos casillas que podrás encontrar al lado derecho de la página, te ayudarán para la toma de datos.

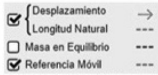


Ilustración tomada de https://phet.colorado.edu

Una vez tengas esto listo, asegúrate que la gravedad esté en $\mathbf{10\ m/seg^2}$ (valor estimado) y ya estarás listo para empezar esta guía. Recuerda entregarla en la fecha acordada con el maestro.

1. Toma la medida de la elongación del resorte al ponerle cualquier masa en su punta y la vas a registrar en la siguiente tabla.

2. Vas a encontrar la razón de cambio de estas dos cantidades que llamaremos la *"constante de elongación"*. Utilizarás el espacio siguiente para hallarla.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{\textit{cambio en la elongación del resorte}}{\textit{cambio en la masa}}$$

	Área:	Matemáticas	Grado:	9°	GUIA DE TRABAJO	Periodo 1
	Profesores:	Julián Enrique Córdoba Castrillón				
	Tema:	Función lineal (Masas y resortes) - Modelación				
	Nombre:					

3. ¿Por qué a la razón de cambio se le puede atribuir el nombre de *"constante"*?

4. Ubica los valores consignados en la tabla del punto No 1 en una representación gráfica usando para ello el plano cartesiano.

5. ¿Cuál es la expresión generalizada (término general, expresión algebraica) que nos ayude a encontrar la elongación del resorte al sujetarle cualquier masa? ¡Describe la forma como la hallaste!

6. ¿De qué material pudo ser hecho el resorte utilizado en el experimento, teniendo en cuenta los resultados obtenidos por usted en el punto anterior, es decir el valor de "k"? Consulta esta información y escribe tus conclusiones a continuación.

7. Registra en la vista de *"hoja de cálculo"* de Geogebra® los datos obtenidos de la tabla del punto No1 y usa la herramienta de *"análisis de regresión de dos variables"* para que encuentres el mejor gráfico posible, es decir el gráfico que mejor se ajuste a los puntos

	Área:	Matemáticas	Grado:	9°	GUIA DE TRABAJO	Periodo 1
	Profesores:	Julián Enrique Córdoba Castrillón				
	Tema:	Función lineal (Masas y resortes) - Modelación				
	Nombre:					

marcados sobre el plano. Una vez hecho esto cópialo y pégalo a continuación.

Espacio para pegar el gráfico de Geogebra

8. Compara la expresión que obtuviste en el punto 5 con la que Geogebra® proporcionó cuando hiciste el *"análisis de regresión de dos variables"* y determina si la generalización fue la misma o diferente. Escribe las razones que tu consideras fueron las determinantes para este resultado.

9. Debes comprobar que efectivamente esa expresión que encontraste sea la correcta o sea la mejor posible, para ello, colócale al resorte del aplicativo una masa de $91g$ y mide la elongación del resorte y ahora compruébalo con la expresión que encontraste. Responde: ¿Son exactos los valores? ¿Por qué?

	Área:	Matemáticas	Grado:	9°	GUIA DE TRABAJO	Periodo 1
	Profesores:	Julián Enrique Córdoba Castrillón				
	Tema:	Función lineal (Masas y resortes) - Modelación				
	Nombre:					

10. Si has podido explorar el aplicativo de la universidad de Colorado aparecen unas masas con signos de interrogación (?) determina una estrategia para encontrar el valor de las masas desconocidas.

Masa de tamaño grande	Masa de tamaño pequeña

11. Escribe a continuación que pudiste aprender con esta actividad y regístralas en la siguiente tabla y evalúa tu desempeño como bueno, regular o malo encada uno de esos aprendizajes.

APRENDIZAJES	VALORACIÓN DEL APRENDIZAJE
1.	
2.	
3.	
4.	
5.	
6.	

7. Escribe las conclusiones de la actividad (aquellos aspectos que más te llamaron la atención) y finaliza tu escrito escribiendo las preguntas que se presentaron al realizar esta actividad para que sean compartidas y solucionadas con ayuda de los demás compañeros del salón.

ANEXO —— B

Resultados registrados interpretados a las respuestas de los estudiantes

* **Observación:** en la tabla se registran las respuestas, a las 7 preguntas seleccionadas, de los 30 estudiantes. Si la respuesta del estudiante da cuenta de la competencia que se desea identificar en ellos, se registra 1 y 0 en el caso contrario o si no da respuesta.

ESTUDIANTE	PREG 1	PREG 2	PREG 3	PREG 4	PREG 5	PREG 6	PREG 7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	0
3	1	1	0	1	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	1	1	1	1	0
6	1	0	1	1	1	1	0
7	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	0
11	1	1	1	1	1	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	0	1	1
16	1	1	1	1	0	1	1
17	1	1	1	1	1	1	0
18	1	1	1	1	1	1	0
19	1	1	1	1	1	0	1
20	1	0	1	1	1	1	0
21	1	0	1	1	1	1	0

22	1	1	0	1	0	0	0
23	1	1	1	1	1	1	1
24	1	0	1	1	1	0	0
25	1	0	0	1	1	1	0
26	1	0	0	1	0	0	0
27	1	1	1	1	0	1	0
28	1	1	1	0	1	1	0
29	1	1	0	1	1	1	0
30	1	1	0	1	0	1	1
Total respuestas erradas	1	6	6	1	7	6	16
Total respuestas correctas	29	24	24	29	23	24	14

REFERENCIAS

BENITEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnología digital* [tesis doctoral, CINVESTAV- México. .

COLL, C., Onrubia, J. y Mauri, T. (2007). *Tecnología y prácticas pedagógicas: las TIC como instrumento de mediación de la actividad conjunta de profesores y estudiantes.* Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learnign.*

LARSON,. y Hostetler. (2001). *Precalculus.* Houghton Miflin.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACINAL. (MEN). (2017). *Plan Nacional Decenal de Educación 2016-2026. El camino hacia la calidad y equidad.* .

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* Trillas.

SALINAS IBAÑEZ, J. (2004). Cambios metodológicos con las TIC. Estrategias didácticas y entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. *Revista de Pedagogía, 56*(3-4).

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

EXPERIENCIA 2

Una actividad de generalización para el desarrollo del pensamiento algebraico

YENI MARCELA BETANCUR ARISTIZÁBAL
URBANO RENGIFO HERNÁNDEZ

RESUMEN

Se documenta una experiencia de aula con estudiantes del grado octavo, mediada por el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. El análisis está centrado en identificar procesos de razonamiento y comunicación empleados por los estudiantes para abordar actividades de generalización en contextos geométricos. La experiencia permite validar el uso de procesos de generalización como un medio para facilitar la transición al pensamiento algebraico, dejando evidencia de la capacidad de los estudiantes para identificar patrones, regularidades y expresiones generales que pueden ser comunicadas usando registros como el de la lengua natural, el tabular o el simbólico.

1. ¿DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

El colegio Berchmans es una institución de la Compañía de Jesús fundada en la ciudad de Cali el 2 de octubre de 1933. Con casi 88 años de trayectoria, ha centrado su propuesta educativa en la persona como ser humano integral, acompañándola en su proceso de formación desde las diferentes dimensiones: ética, espiritual, cognitiva, afectiva, comunicativa, estética, corporaly socio - política.

Atendiendo a las necesidades y retos educativos de la sociedad actual, hace seis años el colegio Berchmans inició un proceso de renovación educativa denominado*Innovando con Sentido*,con tres frentes de acción definidos: la educación inicial, la implementación de metodologías activas en la educación básica (Aprendizaje Basado en Proyectos, ABP) y el programa Diploma del Bachillerato Internacional (I.B.) en la educación media.

Para lograr este múltiple propósito se reconoció la importancia de invertir en programas que permitan la capacitación y cualificación del equipo de profesores a través de convenios interinstitucionales. Es así como en el año 2018 se inscribió a todos los docentes del área de Matemáticas y algunos de Ciencias Naturales al diplomado*Diseño de ambientes de aprendizaje centrado en la resolución de problemas de matemáticas, con la mediación deGeoGebra,*desarrollado por la Universidad Icesi.

Con este programa se buscaba la actualización de los maestros en la Didáctica de las Matemáticas centrada en el reconocimiento de las competencias propias de esta área y en el diseño de materiales de la enseñanza apoyados en recursos tecnológicos comoGeoGebra, Excel, calculadoras y algunas otras aplicaciones que permitieran dinamizar la comunicación de saberes en el aula de clase y generar espacios de mayor actividad y productividad para el estudiante. De este diplomado surge, entonces, la propuesta que se describe y analiza en el presente artículo.

El grupo con el que se hizo la intervención estaba conformado por 32 estudiantes con edades que oscilaban entre los 13 y los 15 años. Quince mujeres y una de ellas nueva en el colegio; diecisiete hombres y uno de ellos reiniciaba proceso en octavo grado. La mayoría inició su proceso formativo en el colegio desde la primera infancia. Era un grupo entusiasta, alegre, dinámico, comunicativo, receptivo, respetuoso, amable, cercano, cuestionador y razonablemente crítico. Había varios estudiantes con un razonamiento lógico y un nivel de argumentación notablemente altos en relación con el promedio del grupo, y a otros grupos de estudiantes que se encontraban en el mismo nivel de escolaridad y en la misma etapa de su ciclo vital. Muchos se mostraron muy organizados con el registro y la toma de apuntes en su carpeta, aunque hay un grupo significativo de estudiantes que mostró algunas dificultades respecto a escribir explicaciones, justificaciones y procedimientos completos. Como en otros grupos de esta promoción, a casi todos sus integrantes les costaba mucho comprometerse con el trabajo fuera del aula, perodurante las clases, sus niveles de atención, participación y producción eran relativamente altos.

2. ¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

Entre los procesos de reflexión que se vienen adelantando en el área de matemáticas en el Colegio Berchmans, ha sido recurrente la pregunta sobre cómo hacer la transición entre los procesos aritméticos y los algebraicos, de tal manera que adquieran mayor sentido para los estudiantes. Es en este marco en donde surge la idea de plantear actividades de generalización, en contextos geométricos, como un posible camino para introducir las ideas básicas del álgebra, posibilitando la interpretación de la letra como representación de variables.

En este contexto se realiza el diseño de una guía de trabajo, mediada por el uso de la herramienta GeoGebra, para identificar los procesos de razonamiento y comunicación empelados por los estudiantes a la hora de enfrentarse a procesos de generalización.

3. REFERENTES TEÓRICOS

Uno de los asuntos didácticos a los que mayor atención y trabajo han dedicado algunos investigadores en educación matemática en décadas recientes es el*paso*de la aritmética y la geometría al álgebra escolar. Hay quienes lo caracterizan como una*ruptura epistemológica*, lo conciben como una*transición*de un tipo de pensamiento a otro, lo ubican como un problema de*lenguaje y comunicación* o, incluso, postulan la necesidad de proponer actividades a los estudiantes desde los primeros años de la educación básica, partiendo del hecho de que se puede*enseñar a pensar algebraicamente*sin que necesariamente medie el uso de signos, letras o fórmulas.

El*pensamiento algebraico*es concebido como un tipo particular de pensamiento matemático genéticamente ligado a una nueva forma de uso de signos cuyos significados son elaborados por los estudiantes y el profesor durante su participación en actividades matemáticas. No debe ser visto necesariamente como un proceso mental interno, sino, sobre todo, como un*proceso discursivo*amarrado a los signos (escritos y verbales) a través de los cuales ocurre. En este sentido, el lenguaje algebraico resulta ser (como todo lenguaje) una forma (y no un medio) de pensar, actuar y comunicar (Radford, 1999).

La introducción al lenguaje algebraico puede tomar muchas direcciones diferentes dependiendo del tipo de actividades que se les proponga a los estudiantes, y de los énfasis que se hagan en los momentos de socialización y formalización del conocimiento (puesta en común). Todas esas diversas maneras de aproximar a los estudiantes al álgebra escolar han sido centro de interés y objeto de estudio de la Investigación en Educación Matemática, alcanzando desarrollos significativos y aportando muchos elementos de un impacto creciente en la concepción que tenemos los docentes en relación con el tipo de actividades, consignas, situaciones y preguntas que deben formularse. Nombramosalgunas de esas aproximaciones (Bednarz et al., 1998):

- *Las reglas para transformar y resolver ecuaciones.*
- *La resolución de problemas.*
- *La generalización de leyes que rigen los números.*
- *La introducción de los conceptos de variable y función.*
- *El estudio de las estructuras algebraicas.*

Entre las otras, vale mencionar una cierta*perspectiva geométrica*, que es encontrada porCharbonneauy Radford en aquellas aproximaciones al álgebra que se enfocan en la generalización de patrones geométricos y en la construcción de fórmulas geométricas que podrían preceder a la aparición del pensamiento analítico en el aprendizaje del álgebra; *tal es el caso de la actividad que propusimos a nuestros estudiantes, la cual describiremos y analizaremos a continuación.*

4. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. Descripción de la hoja de trabajo

La hoja de trabajo consta de tres actividades. La primera es la actividad diagnóstica que busca identificar, por medio de tres preguntas, los conceptos previos que tienen los estudiantes sobre los polígonos regulares, y la relación entre el número de vértices y diagonales. La segunda actividad implica el uso de la herramienta tecnológica GeoGebra para facilitar la visualización de la relación que existe entre el número de vértices de un polígono regular y el número de diagonales que sale de un solo vértice. Finalmente, la tercera actividad busca que los estudiantes encuentren una relación entre el número de vértices de un polígono regular y el número total de diagonales, nuevamente empleando como herramienta GeoGebra.

4.2. Objetivo

Identificar algunos procesos de razonamiento y comunicación empleados por los estudiantes para realizar procesos de generalización.

4.3. Condiciones de aplicación

Hicimos varios intentos con otro grupo y encontramos algunas dificultades logísticas relacionadas con la disponibilidad de las salas o de los equipos, tiempo insuficiente para el desarrollo de la actividad, dificultades de conexión, disposición de algunos estudiantes, inasistencia, situaciones de orden público, etc. Con el grupo Octavo B, en el que finalmente se pudo hacer la actividad, se había hecho un intento previo, pero inconcluso. Varias semanas después se retomó la actividad desde el inicio, esto permitió disponer del tiempo necesario para hacer todas las consideraciones requeridas para que, así, algunos estudiantes individual o grupalmente llegaran al final esperado expresando de distintas maneras la generalidad encontrada.

5. ¿QUÉ MATERIALES SE UTILIZARON EN EL PROYECTO?

5.1. Instrumentos de mediación

Para el desarrollo de esta hoja de trabajo se empleó como instrumento de mediación la herramienta tecnológica GeoGebra. En este sentido, es importante aclarar que, aunque los estudiantes en años anteriores habían tenido un acercamiento a esta herramienta, fue necesario orientar el proceso de construcción de los polígonos regulares y de sus respectivas diagonales.

5.2. Instrumentos de recolección

Los instrumentos empleados para la recolección de la información que posteriormente serían objeto de análisis y reflexión fueron básicamente la hoja de trabajo resuelta por los estudiantes y algunas entrevistas con unos pocos de ellos, con las cuales se buscaba tener más claridad sobre los procesos de visualización y razonamiento realizados por ellos y que no podían inferirse claramente a partir de la sola lectura de sus descripciones.

6. ANÁLISIS CUALITATIVO

Al realizar el análisis de la primera pregunta referente a encontrar una relación matemática entre el número de vértices o lados de un polígono regular y el número de diagonales trazadas desde un vértice, se encuentra en el grupo de estudiantes tres tipos de respuesta acordes con sus procesos de visualización, razonamiento y construcción.

En primer lugar, se destacan aquellos estudiantes que solo logran describir esta variación en términos cualitativos, estableciendo una relación horizontal, pero sin llegar a una representación matemática que indique la correlación entre las dos variables, es decir, una relación vertical.

Como se puede observar en esta respuesta, el estudiante 1 logra identificar que a mayor número de lados se generará también un aumento en el número de diagonales, además, observa que el número de diagonales va aumentando en una unidad, pero no logra enunciar una expresión que permita encontrar el número de diagonales dado el número de vértices.

IMAGEN —— 1
Tabla de manejo de las dos variables del problema

NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO REGULAR	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
NÚMERO DE DIAGONALES TRAZADAS DESDE UN VÉRTICE	0	1	2	3	4	5	6	7

a. ¿Qué relación matemática encuentras entre estas dos variables (número de lados del polígono regular y número de diagonales desde un vértice)?

La relación es que cuando el número de lados aumenta el número de diagonales también va a aumentar consecutivamente.

Estudiante 1

Hay un segundo grupo de estudiantes que logra identificar la relación entre el número de diagonales desde un vértice y el número de vértices de un polígono regular, logrando expresarla en lenguaje natural e incluso en una expresión algebraica. Sin embargo, este grupo de estudiantes recurre en sus justificaciones al empleo erróneo de un concepto estudiado en años anteriores, identificando que entre estas dos variables se establece una relación directamente proporcional.

IMAGEN —— 2
Respuesta de un estudiante

Que son directamente proporcionales, ya que cuando una variable aumenta la otra también lo hace, pero también hay una constante presente que es que cada vez que aumenta una, la otra lo va a ser y va a ser el mismo número (n) menos tres (n-3)

Estudiante 2

La relación que se puede encontrar es directamente proporcional ya que el numero de lados del polígono y el numero de diagonales crecen de una forma proporcional. En otras palabras, en todos los casos el numero de diagonales que salen de un solo vértice siempre es el numero de lados menos 3. (n-3)

Estudiante 3

Como se puede observar en estos dos casos, los estudiantes 2 y 3 enuncian claramente la relación observada entre el número de lados y el número de diagonales, y logran expresarla por medio de la representación algebraican - 3,sin embargo, son recurrentes en afirmar que dicha relación es directamente proporcional, demostrando con esto que dicho concepto no es muy claro para ellos.

Finalmente, hay un tercer grupo de estudiantes que enuncia la relación establecida en lenguaje natural, pero no llega a la representación algebraica.

IMAGEN —— 3
Respuesta de un estudiante

Es el número de los lados del polígono regular menos 3 (el mismo vértice y los dos lados consecutivos.

Estudiante 4

Cuando se indaga a los estudiantes por una relación matemática entre el número de lados o vértices de un polígono y el número total de diagonales, surgen diferentes respuestas fruto de sus visualizaciones y análisis.

Por ejemplo, un estudiante encuentra que la diferencia entre el número de diagonales de dos polígonos consecutivos es equivalente al número de lados menos 2. Además, encuentra que el número de diagonales se comporta de manera diferente si el número de vértices es par o impar, y enuncia dos expresiones algebraicas sin darse cuenta de que ambas son equivalentes, ya que funcionan tanto para valores pares como impares.

IMAGEN —— 4
Tabla con los resultados del conteo

NÚMERO DE LADOS DEL POLÍGONO REGULAR	3	4	5	6	7	8	9	10
NÚMERO TOTAL DE DIAGONALES	0	2	5	9	14	20	27	35

IMAGEN —— 5
Respuesta de un estudiante

b. ¿Qué relación matemática encuentras entre el número de lados del polígono y su respectivo número de diagonales? (En otras palabras, ¿cómo podrías hallar el número de diagonales de un polígono regular conociendo el número de lados o vértices?)

> A medida que aumenta un lado del polígono, la diferencia del número de diagonales del nuevo polígono respecto el actual, es igual al número de lados del polígono anterior al actual.

c. ¿Podrías representar la anterior relación por medio de una expresión algebraica, modelo matemático (fórmula)?

> Ecuación de diagonales para polígonos de lados pares: n.(n-4) / 2 + n / 2
> Ecuación de diagonales para polígonos de lados impares: n.(n-3) / 2

Estudiante 5

Hay otros estudiantes que emplearon la relación obtenida entre el número de vértices y número de diagonales desde un vértice para encontrar el número total de diagonales, sin embargo, a la hora de expresarlo simbólicamente omiten el paréntesis, sin percatarse que con esto cambian el sentido de lo que quiere indicar.

IMAGEN —— 6
Respuesta de un estudiante

b. ¿Qué relación matemática encuentras entre el número de lados del polígono y su respectivo número de diagonales? (En otras palabras, ¿cómo podrías hallar el número de diagonales de un polígono regular conociendo el número de lados o vértices?)

> Una forma de encontrar el total de diagonales de un polígono es multiplicando el numero de vértices por el numero de vértices menos 3 (esto debido a que el número de vértices menos tres es la cantidad de diagonales que pueden salir de un solo vértice), luego este resultado se divide por 2 ya que el resultado es la cantidad total de diagonales repetidas dos veces, al dividirlo se puede encontrar el resultado final.

c. ¿Podrías representar la anterior relación por medio de una expresión algebraica, modelo matemático (fórmula)?

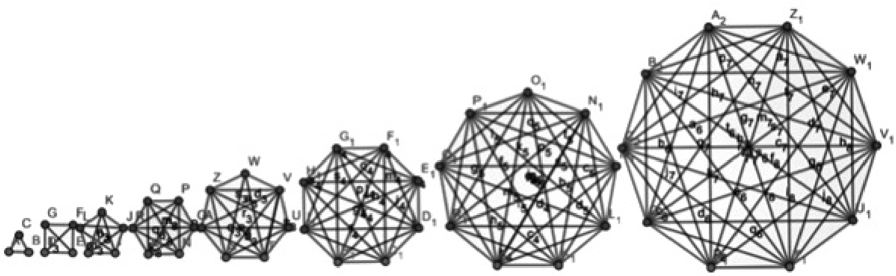
> **n x n-3 /2 Ejemplo: 6 x 3 = 18 = 18/2 = 9 n= Numero de vértices**

Estudiante 6

Hay un estudiante que propone un razonamiento muy diferente al de sus compañeros, estableciendo, asimismo, una conexión con la suma de Gauss (suma de los primeros n números naturales) que había sido objeto de trabajo semanas anteriores.

Lo que él hace es descomponer el número total de diagonales en una secuencia de números que coincide con lo que visualiza en las figuras, por ejemplo:

IMAGEN — 7
Gráficos del conteo que hizo un estudiante



Para el pentágono observa que del vértice K salen dos diagonales, del vértice L salen otras dos diagonales, del vértice J sale una diagonal y que las diagonales que salen de los otros dos vértices no se cuentan porque ya fueron trazadas. De allí sale la secuencia de números 2 + 2 + 1= 5. Siguiendo el mismo razonamiento, encuentra que la secuencia para el hexágono es 3 + 3 + 2 + 1 = 9, y para el pentágono 4 + 4 + 3 + 2 +1 = 14, etc. Y es aquí en donde logra observar que para el caso del pentágono el número total de diagonales es la suma de los tres primeros números naturales menos 1, para el hexágono sería la suma de los cuatro primeros números naturales menos 1, y así sucesivamente, logrando enunciar de la siguiente manera la relación observada:

IMAGEN —— 8

Un ejemplo de generalización realizado por un estudiante

b. ¿Qué relación matemática encuentras entre el número de lados del polígono y su respectivo número de diagonales? (En otras palabras, ¿cómo podrías hallar el número de diagonales de un polígono regular conociendo el número de lados o vértices?)

Lo que yo formule es que al numero de ldos de la figura se le resta 2 y eso nos da n numero, luego hago la suma de los primeros n números y a eso le resto 1.

c. ¿Podrías representar la anterior relación por medio de una expresión algebraica, modelo matemático (fórmula)?

N – 2 = x suma de los primeros x números = y y-1= numero de diagonales

Estudiante 7

CONCLUSIONES

Los estudiantes desempeñaron un papel muy activo en la construcción de su propio aprendizaje, primero entendieron el problema, después exploraron con ayuda de GeoGebra, comunicaron sus ideas por la vía oral y escrita, y en la parte final participaron en el debate con todo el grupo, y en la formalización que hicieron con el apoyo y orientación de los profesores.

Las actividades de generalización de patrones numéricos se constituyen en un medio eficiente para el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que, además de constituirse en un estimulante desafío para los estudiantes, potencian su pensamiento analítico y variacional, entre otros.

El uso de recursos tecnológicos y aplicaciones como GeoGebra facilitan los procesos de visualización, razonamiento y construcción, ya que permiten centrar la atención en asuntos matemáticos más relevantes que la sola representación.

Como educadores matemáticos debemos estaralerta a los patrones, razonamiento y simbolizaciones que los estudiantes proponen para reconocer su pertinencia y validez.Tampoco podemos desestimar el hecho de que nuestra propia atención pueda estar fija en un patrón que eclipse a los otros, la actividad matemática no puede reducirse a que el estudiante adivine cuál es el patrón o qué es lo que tiene en mente el profesor.

En la expresión de la generalidad se debe admitir el uso de registros no simbólicos, sin dejar de reconocer el momento oportuno para introducir los signos y analizar las equivalencias entre lasdistintas expresiones encontradas.

Lasactividades de generalización no pueden constituirse en el único camino para aproximarnos al pensamiento algebraico, necesitan ser complementadas con otras como las que se aportan en las diferentes perspectivas de aproximación al álgebra.

En la actividad presentada en el presente artículo, los estudiantes tuvieron la oportunidad de trabajar en varios procesos centrales del pensamiento matemático como generalizar, encontrar patrones, modelar, comunicar ideas matemáticas, y construir conjeturas y contraejemplos. Este tipo de actividades puede ser propuesto a los estudiantes desde los últimos años de enseñanza básica primaria.

REFERENCIAS

RADFORD, L. (1999).*El aprendizaje del uso de signos en álgebra. Una perspectiva postvigotskiana.*Revista Educación Matemática. GEI. Diciembre de 1999.

BEDNARZ N., Kieran C., Lee L. y Otros.*Aproximaciones al Álgebra: Perspectivas para la Investigación y la Enseñanza.*

EXPERIENCIA 3

El diseño de un ambiente de aprendizaje, a partir del software GeoGebra, de los elementos de una función lineal con estudiantes de grado octavo

NATALIA AMU MANCILLA
JENNY CAROLINA CHOCÓ POLO
DIANA MARCELA ESCOBAR MUÑOZ

RESUMEN

El proyecto que se presenta a continuación se centrará en analizar el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de octavo grado a partir de una serie de actividades en la que desarrollan el concepto de función mediado con el software de GeoGebra, el cual permite a los estudiantes una exploración, visualización y manipulación de la relación de los objetos matemáticos con un contexto social o real. En este trabajo se realizó un análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes para razonar matemáticamente y así desarrollar de las actividades propuestas.

¿DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

El proyecto se desarrolló en el Colegio Lawrence Kohlberg, del sur de Cali, donde funciona una única jornada en la mañana con una única sede. Es un colegio privado que fundamenta su modelo pedagógico en el constructivismo.

El colegio está ubicado en el barrio Caney, de la Comuna 17 de la ciudad de Cali. Aquí estudian los alumnos de los grados preescolar a noveno de básica secundaria. La aplicación del proyecto se realizó en el tercer periodo del año lectivo 2021.

El grupo que participó en este proyecto estuvo conformado por los estudiantes de octavo grado de dicha institución. El grupo era mixto, un 46 % niños y 54 % niñas, con edades que oscilaban entre los 13 y 15 años. Los estudiantes de este grado tenían un nivel básico en el uso de computadores y bases mínimas de álgebra; además, la experiencia con el uso del software GeoGebra se quedaba en una exploración mínima de construcción de polígonos.

Respecto al contexto familiar, el 60 % de los alumnos convive con familias disfuncionales, el 38 % de ellos forma parte de familias tradicionales, mientras que el 20 % corresponde a familias desplazadas.

El 30 % de los estudiantes habita en viviendas o apartamentos propios y el 70 % vive en casas o apartamentos alquilados. En su mayoría, los estudiantes están cerca de la institución, en las comunas 17 y 22 de Cali, que corresponden a los estratos socioeconómico 4 y 5, es decir, gran parte de las familias tiene un empleo u otra fuente de ingresos permanente que les posibilitan un nivel de vida cómodo. Las viviendas están construidas en material y cuentan con los servicios básicos de agua potable, energía, gas natural domiciliario e internet.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

En este artículo se condensan los resultados del proyecto, el cual consiste en el análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes para razonar matemáticamente. Este trabajo se enmarca en el área del desarrollo del pensamiento algebraico. Detalladamente, se reportan las construcciones y conjeturas hechas por los estudiantes de octavo grado de la IE Lawrence Kohlberg, del sur de Cali, en un ambiente de solución de problemas totalmente mediado por tecnologías que promueve el uso de GeoGebra a través de la plataforma Google Sites con el apoyo de herramientas de audio y video como YouTube, y herramientas como formulario Google que nos permite la recolección de información por medio de preguntas abiertas o de selección múltiple.

En el trabajo se analizaron las actividades de aprendizaje, pero también el rol del docente en el desarrollo de estas y las estrategias usadas por los estudiantes, las cuales llevaron a los estudiantes al desarrollo de los conceptos relacionados con la función lineal y sus diversas representaciones. Por ejemplo, la actividad número dos pone en juego las tres representaciones que usamos para esta aplicación, llevando al estudiante a realizar pasos entre los diferentes registros de representación.

El objetivo principal de este documento es condensar una implementación didáctica concreta en la que el docente pueda desarrollar un ambiente de aprendizaje totalmente mediado por tecnología que le permita a los estudiantes una participación activa en la construcción del conocimiento, más precisamente en la construcción del objeto matemático función lineal.

Por lo general, cuando se introduce en el tema de función lineal en el grado octavo, no se hace tan explícita la relación entre sus representaciones algebraicas, gráfica y tabular, por lo que al estudiante le resulta complicado moverse entre registros, y termina por asimilar la fórmula y las gráficas de manera mecánica. Por esta razón es importante establecer una relación directa entre las diversas representaciones de la función lineal que le permitan al estudiante moverse entre registros, reconociendo en todos las variables que conforman el objeto matemático.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

El proyecto se estructuró en dos partes: supuestos teóricos y el diseño metodológico.

SUPUESTOS TEÓRICOS

Los supuestos teóricos –resolución de problemas de matemáticas y tecnología digital en educación matemática– que sirvieron de soporte al proyecto se describen de manera concreta a continuación.

Resolución de problemas. Pólya (1945), en su modelo descriptivo, establece las necesidades para aprender a resolver problemas. Para este autor, el principal fin es el de ayudar a que el alumno adquiera la mayor experiencia en la tarea de resolución de problemas, por lo que estableció cuatro fases en la resolución de problemas: (a) entender el problema, (b) configurar el plan, (c) ejecutar el plan y (d) visión retrospectiva.

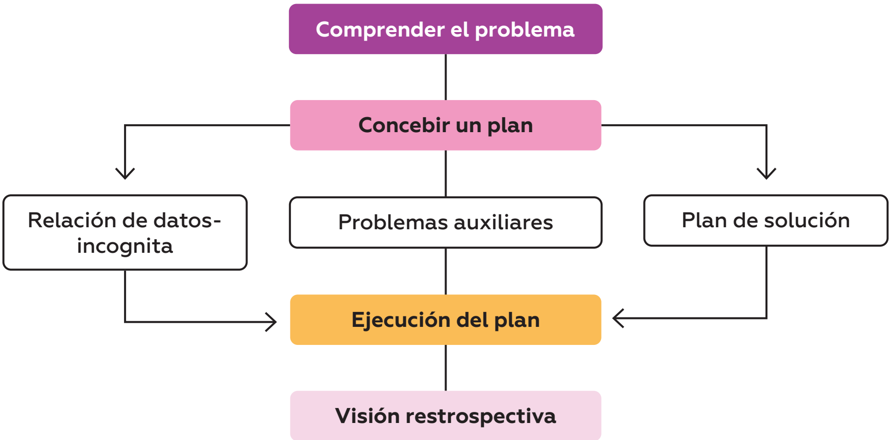
Entender el problema. Se refiere a que el estudiante pueda responderse una serie de preguntas como, por ejemplo, ¿entiendo todo lo que dice el problema?, ¿puedo replantear el problema con mis propias palabras?, ¿cuáles son los datos que hacen parte del problema?, ¿sé a dónde quiere llegar?, ¿hay suficiente información?, ¿hay información que no es clara?, ¿es este problema similar a algún otro que ya haya resuelto antes?

Configurar el plan. Se refiere al cómo o qué estrategia va a usar el estudiante para resolver el problema. Las estrategias pueden partir desde aplicar pruebas de ensayo y error hasta plantear toda una táctica que le permita intentar llegar a la solución del mismo.

Ejecutar el plan. Se refiere a la puesta en práctica de lo que el estudiante estableció en la configuración. Es llevar a cabo una a una las etapas planteadas. En este punto puede suceder que en un momento determinado lo que se planteó no sea pertinente para la solución del problema, por lo que habría que replantear la estrategia y volver a comenzar. Generalmente, en la ejecución se usan procesos matemáticos que permiten darle la exactitud que requiere la solución del problema.

Visión retrospectiva. Se refiere al poderse cuestionar sobre lo que se hizo, ver si el proceso desarrollado permitió en realidad resolver el problema. En este paso el estudiante debe acudir a sus procesos meta cognitivos para revisar si lo que hizo está bien o está mal y, si es necesario, replantear el proceso de resolución. Las fases anteriores caracterizan, según Pólya (1945), al resolutor ideal. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas cuya intención clara es actuar como guía para la acción.

FIGURA —— 1
Fases en la resolución de problemas de Pólya



Fuente: elaborado por Natalia Amu, Diana Escobar y Jenny Choco

TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Anteriormente, la educación estaba centrada en la alfabetización de las personas, y pretendía que los individuos memorizaran información, habilidades y pautas de comportamiento en su entorno cultural, los cuales utilizarían para toda su vida, pero estos cambios se producían muy lentamente. Hace bastante tiempo que las matemáticas suelen ser muy aburridas, es por esto que los estudiantes no se motivan a aprender y no saben lo maravilloso que es este mundo de las matemáticas. Es por esto que debemos darle la oportunidad a los estudiantes de interesarse a querer aprender; para eso podemos utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación, las cuales nos brindan muchos beneficios a la hora de hacer una clase y una gran ayuda fuera de ella. El propósito de la educación con las TIC es que alcancen las competencias matemáticas necesarias para comprender, utilizar, aplicar, comunicar conceptos y procedimientos matemáticos. Además, que a través de la exploración, abstracción, medición, clasificación, estimación y obtener resultados, que les permitan comunicarse para hacer interpretaciones y representaciones, descubren que las matemáticas están relacionadas con la vida cotidiana y que esta asignatura va más allá que las paredes de la sala de clase.

El uso en particular del software GeoGebra va encaminado a su versatilidad a la hora de mezclar lo algebraico con lo geométrico de manera simultánea, y a lograr ver cómo esos dos tipos de representación se entrelazan para dar paso a representaciones ejecutables que consiguen desembocar en la elaboración de conjeturas y la producción de argumentos situados. Es por esta razón que dicho software fue usado en la creación de applet pertenecientes a las actividades.

DISEÑO METODOLÓGICO

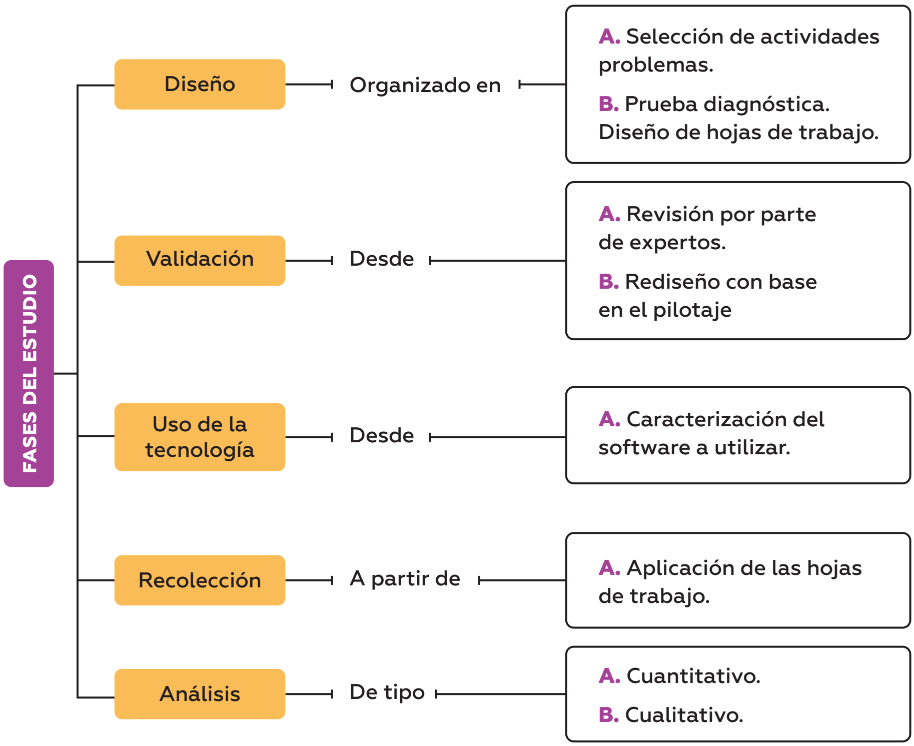
En esta sección se presentan los elementos del diseño metodológico que se tuvieron en cuenta durante el desarrollo de la investigación en las diferentes fases: diseño, validación, uso de tecnología, recolección y análisis de resultados. Las fases implementadas fueron las sugeridas en la tesis doctoral de Benítez (2006).

Diseño. En esta fase se exponen dos momentos: el primero alude a la selección de actividades o problemas, los cuales serán estructurados a la luz de los estándares básicos de competencia en matemática propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) para el grado octavo de secundaria. Lo anterior posibilita realizar una prueba diagnóstica que nos permitirá comprender qué conocimientos tienen los estudiantes acerca del concepto de función lineal, para así realizar el diseño de las hojas de trabajo, lo que se consolida en un segundo momento.

Validación. Una vez diseñada la prueba diagnóstica y las hojas de trabajo, se presentaron para una revisión por parte del director del proyecto y de docentes que tuvieran conocimiento sobre la elaboración de propuestas en las TIC y en la resolución de problemas matemáticos. Los anteriores pasos se realizaron con el fin de mejorar y elaborar hojas de trabajo que dieran cuenta de la investigación objeto de estudio.

Uso de tecnología. Se les dio a los estudiantes unas instrucciones sobre el manejo de GeoGebra, siguiendo a Benítez (2006). En esta fase se dio

FIGURA —— 2
Fases de estudio desarrolladas en el trabajo



Fuente: elaboración propia.

una descripción global del software, mostrándoles a los estudiantes las características más importantes de GeoGebra, las funciones, los comandos principales, y la forma de operarlos en relación con la vista gráfica y la hoja de cálculo.

Recolección. Se utilizaron las hojas de trabajo y formularios Google como instrumento de recolección. Algunos de los cuestionamientos estuvieron basados en un contexto realista o hipotético. Cabe mencionar que la propuesta de trabajo se abordó de manera individual.

Fase de procesamiento. Luego de haber recogido la información, se procedió a archivarla de forma electrónica. Se conservan los archivos electrónicos (fotografías y videos) tomados por los estudiantes. Una vez guardados los archivos, se desarrollaron unos formularios para realizar un análisis tanto cualitativo como cuantitativo. En lo cuantitativo, se emplearon las siguientes categorías: correcto e incorrecto. Referente a lo cualitativo, se utilizaron categorías de acuerdo con el tipo de recursos y estrategias utilizadas por los estudiantes participantes.

Análisis de resultados. Una vez recogida la información, se procedió a analizarla con base en los desarrollos cualitativos y cuantitativos. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, fue posible entregar la respuesta a las preguntas planteadas en la investigación, las cuales marcaron el derrotero para la realización del trabajo. Por otro lado, se pudo evaluar el impacto de las actividades propuestas a los participantes en el salón de clase.

En esta fase del estudio el uso de tecnología digital desempeña un papel importante al interior del aula de clase, puesto que posibilita el progreso de la capacidad del estudiante para construir conjeturas.

¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

El material con el que se ejecutó el proyecto fue el software de Geometría Dinámica GeoGebra y las herramientas de Google (formularios, presentaciones, vídeos, entre otros) y el registro en video de las sesiones de clase .

¿QUÉ RESULTADOS OBTUVIERON?

Resultados de la hoja de trabajo 1 (elementos de las funciones lineales)

En este espacio se llevará a cabo el análisis a partir de los resultados obtenidos por parte de los estudiantes en el momento de desarrollar la actividad propuesta. Se hará un análisis de tal forma que expondrán apartados de la consigna presentada a los estudiantes; además, se harán comentarios en los que se identifica la aproximación por parte de los estudiantes al objeto matemático, como también aquellas dificultades que se presentan en el momento de resolver los distintos problemas propuestos. Por otro lado, también se analizaron las diferentes gráficas estadísticas que se obtuvieron por parte de los resultados de los estudiantes.

CONDICIONES DE TRABAJO

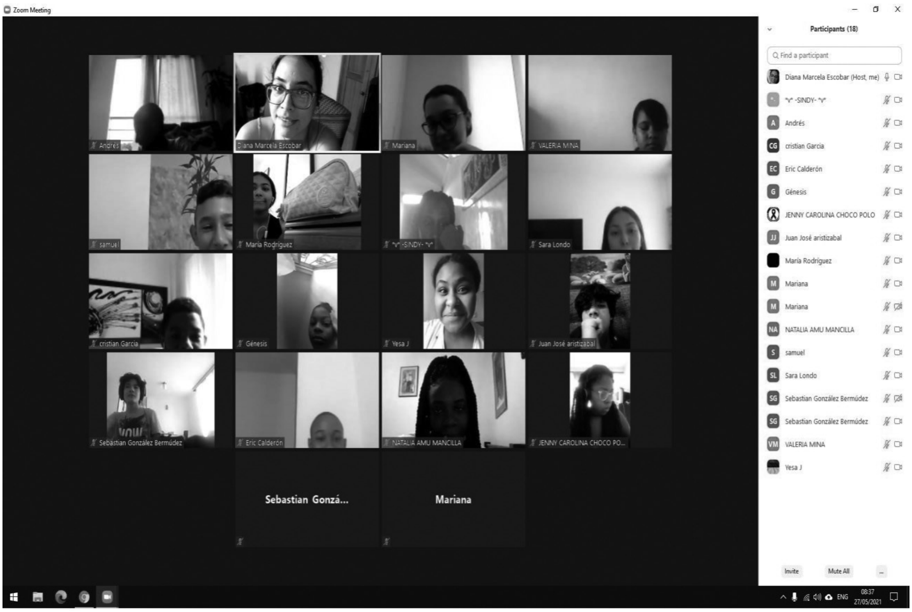
La hoja de trabajo se aplicó el 27 de mayo de 2021 a 13 estudiantes (7 niñas [53,85 %] y 6 niños [46,1 5%] entre 13 y 15 años de edad. Toda la aplicación se realizó a través de Zoom, una plataforma para hacer reuniones virtuales, así que en un comienzo ellos debían ir resolviendo los ejercicios en GeoGebra e ir respondiendo simultáneamente en un formulario que se encontraba ahí mismo. En las socializaciones, que se daban al final de cada actividad, los estudiantes debían compartir por Zoom para argumentar cómo estaban resolviendo las preguntas. Para la aplicación se contaba con la participación de 13 estudiantes, sin embargo, es las diferentes actividades la participación tuvo variaciones. Esto sucedió debido a algunos problemas de internet y fallas en sus equipos. En la actividad 1 la participación fue de nueve estudiantes (6 niñas [66,7 %] y 3 niños [33,3 %]), en la actividad 2 fue de siete estudiantes (3 niños [42.8 %] y 4 niñas [57.1 %]), en la actividad 3 fue de trece estudiantes (7 niñas [53,85 %] y 6 niños [46,15 %]) y en la evaluación final fue de diez estudiantes (6 niñas [60 %] y 4 niños [40 %]).

Las fases en las que se desarrollaron las actividades para la hoja de trabajo 1, en el grado octavo, se describen en la Tabla 1.

TABLA — 1
Fases del desarrollo de la hoja de trabajo 1

FASE	DESCRIPCIÓN
Prueba diagnóstica	Antes de iniciar cualquier actividad, se le presentó a los estudiantes una prueba diagnóstica con el objetivo de reconocer cuáles eran los conocimientos previos que tenían respecto al objeto matemático.
Videos	Cada actividad contaba con dos vídeos introductorios para darle un acercamiento a los estudiantes sobre los conceptos en los que iban a trabajar.
Actividad 1 **Actividad 2** **Actividad 3**	Cada docente estuvo a cargo de la presentación y guía de cada actividad. Se hizo un recuento de cada actividad anterior para tomar los elementos necesarios y enfrentar cada situación nueva. Solo las actividades 1 y 2 contaban con un formulario en el que los estudiantes iban registrando las respuestas a las consignas que se presentaban en cada actividad.
Evaluación final	La evaluación final se presenta en un formulario de Google con el objetivo de recoger todos los elementos aprendidos de las actividades 1, 2 y 3.
Uso de GeoGebra	Cada actividad fue realizada en GeoGebra con diversos ejercicios propuestos en los que se hace uso de las herramientas, vistas y construcciones. En la actividad 1 los estudiantes utilizaron los deslizadores para ver los cambios que se generaban en la función al cambiar su pendiente o constante. En la actividad 2 los estudiantes usaron de diversas vistas como la gráfica y la de cálculo. Además, hicieron construcciones con herramientas como "punto", "recta", "pendiente", entre otras. Por último, en la actividad 3 los estudiantes debían diligenciar sus respuestas dentro de la misma actividad con números, letras y símbolos.
Socialización	Este proceso está inmerso en la actividad del uso de GeoGebra, debido a que la dinámica usada para la aplicación constó de la presentación de las actividades por parte de los estudiantes, al mismo tiempo que estos iban haciendo la construcción con la colaboración de sus compañeros
Institucionalización	Esta fase también inmersa en el proceso de uso de GeoGebra, se ve reflejada cuando en medio del proceso de construcción los estudiantes reconocen los elementos que conforman la función lineal no solo por su concepto, sino también por sus representaciones, reconociéndose en los tres tipos de registro

FIGURA —— 3
Inicio a la aplicación de la hoja de trabajo 1



Fuente: elaboración propia (2020).

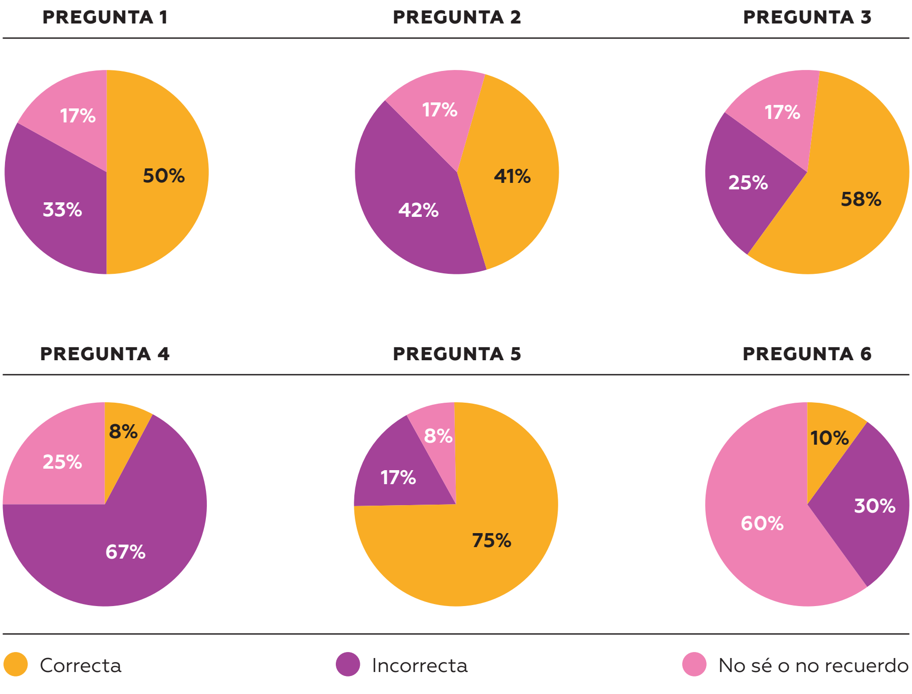
PRUEBA DIAGNÓSTICA

Para dar inicio a la aplicación se presenta la prueba diagnóstica, diseñada en un formulario de Google, con respuestas cortas para que los estudiantes puedan argumentar, cuyo propósito es comprender los conocimientos que tiene el estudiante acerca de los elementos que componen la función lineal. En este primer momento se lleva a cabo la presentación de la prueba diagnóstica por parte del docente utilizando la aplicación Zoom para explicarle el propósito que tenía la prueba diagnóstica en el trabajo a realizar. Luego se les envió el formulario de Google a los estudiantes para que pudieran dar inicio a contestar cada una de las preguntas. La prueba diagnóstica cuenta con 12 preguntas (Anexo 1). Las seis primeras preguntas (1-6) tienen el propósito de saber qué entienden los estudiantes por los conceptos de función, pendiente, recta, variable dependiente, variable independiente y punto de origen, con el fin de comprender cada uno de los conocimientos que tienen estudiantes sobre estos. Las seis últimas preguntas (7-12) tienen como finalidad que los estudiantes logren definir con sus propias palabras las características de la función lineal, sus representaciones y el paso de un lenguaje a otro. Después, terminado un lapso de 10 minutos para responder el formulario, se da comienzo a realizar las actividades propuestas de la hoja de trabajo.

Análisis de la prueba diagnóstica

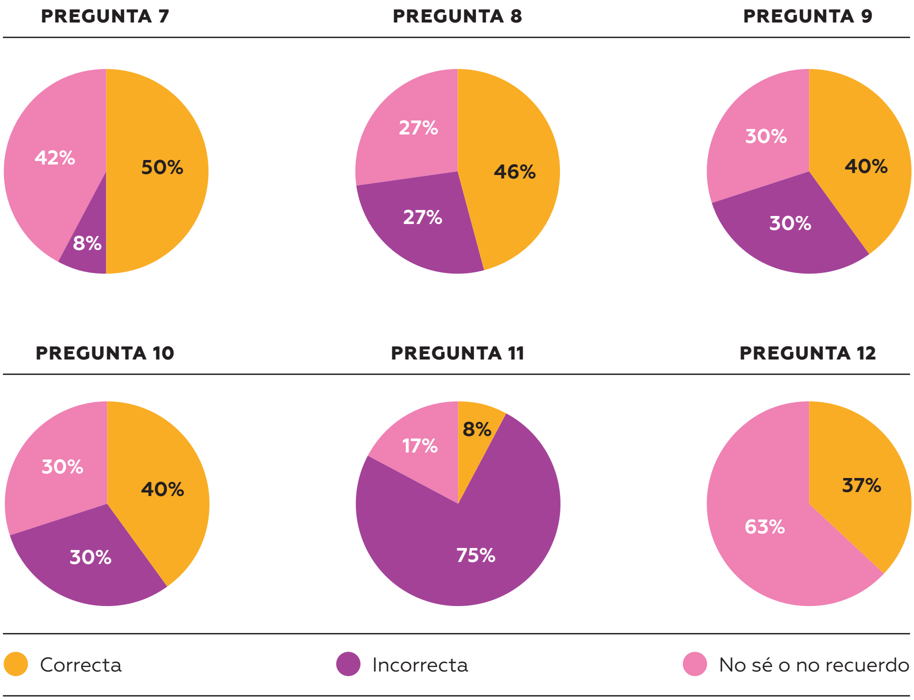
Para presentar el análisis se tendrá en cuenta el consolidado de respuestas correctas, incorrectas y "no sé o no me acuerdo" que dieron los estudiantes. Es importante resaltar que parte de los estudiantes recurrieron a las definiciones dadas en internet y otra parte fue sincera al decir que no sabía, lo cual deja entre ver que este concepto no hace parte del andamiaje conceptual de los estudiantes.

FIGURA —— 4
Consolidado de respuestas de la Prueba Diagnóstica, parte 1



Fuente: elaboración propia (2021).

FIGURA —— 5
Consolidado de respuestas de la Prueba Diagnóstica, parte 2



Fuente: elaboración propia (2021).

Al observar los gráficos anteriores, notamos que el 75 % de los estudiantes (promedio de todas las preguntas) obtiene respuestas incorrectas y que no saben o no recuerdan las definiciones pedidas, sin embargo, cuando vamos a lo escrito por ellos notamos que la argumentación es un proceso débil a pesar de que intentan explicar lo que quieren dar a entender. Por su parte, el 25 % de los estudiantes (promedio de todas las preguntas) obtiene respuestas correctas, procura tener un proceso argumentativo más elaborado, aunque se puede determinar que siguen teniendo falencias en la concepción que tienen de la función lineal.

ACTIVIDAD 1

La actividad 1 de la hoja de trabajo se aplicó el 27 de mayo de 2021; esta actividad permitió que los estudiantes pudieran explorar sobre los elementos principales de la función y qué cambios se generaban en la función, si estos elementos varían, además de la comparación de varias funciones para establecer relaciones de paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Esta actividad 1 constaba de tres ejercicios diseñados en GeoGebra y nueve preguntas que se debían diligenciar en un formulario (Anexo 2), las cuales estaban planteadas en el siguiente orden:

- Con el apoyo del Software dinámico de GeoGebra, explora con los deslizadores para ver en qué afecta a la función las variaciones que ocurren.
- Argumenta qué pasa cuando la pendiente es positiva, negativa y cero.
- Argumenta qué pasa cuando la constante varía y qué relación tiene con el punto de origen.
- Con el apoyo del software dinámico de GeoGebra, utiliza los deslizadores para cambiar las pendientes de dos funciones.
- Argumenta cómo deben ser un par de funciones para que al representarlas gráficamente sus rectas sean paralelas.
- Argumenta cómo deben ser un par de funciones para que al representarlas gráficamente sus rectas sean perpendiculares.
- Todas las preguntas deben contestarse en el formulario.
- Socialización de los resultados con el docente y los pares.
- Institucionalización de resultados.

Objetivo de la actividad 1

- Analizar cómo comprenden y argumentan los elementos de las funciones lineales los estudiantes de octavo grado.
- Analizar cómo determinan una relación entre la pendiente y las rectas paralelas y perpendiculares.

Análisis actividad 1

A partir de los resultados mostrados a continuación y las respuestas dadas por los estudiantes en la socialización se hará el análisis de dos formas: análisis de resultados y análisis de socialización.

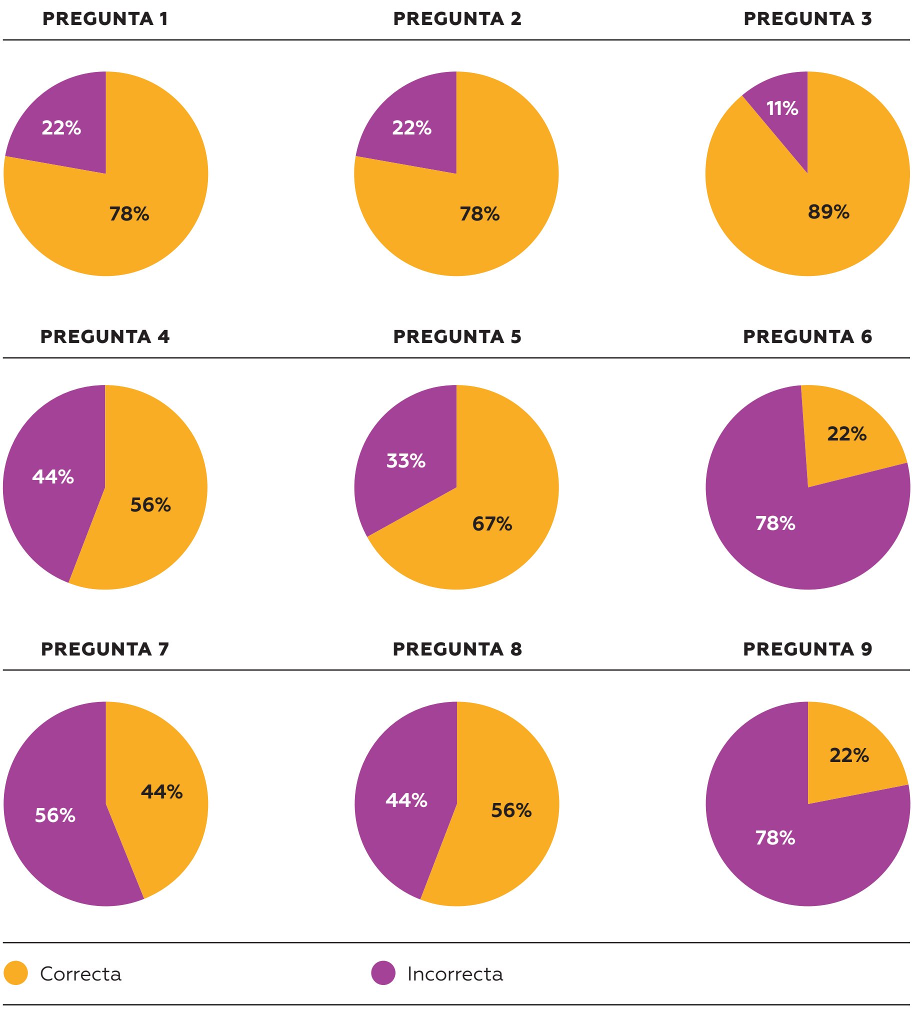
Análisis de resultados (Actividad 1)

Se puede determinar que alrededor del 73 % de los estudiantes (promedio de las preguntas 1-5) tiene claridad sobre el concepto de pendiente y cómo la variación de este afecta a la función, teniendo en cuenta que la variación puede ser positiva, negativa o cero. Además, el 56 % de los estudiantes (pregunta 8) entiende qué elementos debe tener un par de funciones para que sus rectas sean paralelas. También se puede determinar que alrededor del 33 % de estudiantes (promedio preguntas 6 y 7) reconoce la relación que hay entre los puntos de intersección en los ejes con la constante y pendiente, y que, además, solo el 22 % de los estudiantes (pregunta 9) entiende los elementos para que las rectas de dos funciones sean perpendiculares.

Es así como se puede ver que la mayoría de estudiantes entiende el concepto de pendiente y cómo varía la función si la pendiente es positiva, negativa o cero, pero se les dificulta aún entender qué papel desempeña la constante en la función y qué relación tiene con el eje Y. Además, se puede ver que entienden la relación que tienen las pendientes de dos funciones para que estas sean paralelas, pero aún no tienen claridad sobre la relación de las pendientes de dos funciones para que estas sean perpendiculares.

Análisis de socialización (Actividad 1). A pesar de que en la socialización la mayoría de estudiantes mostraba haber entendido tanto las preguntas como los elementos de las funciones lineales, se ve una gran dificultad para argumentar sus ideas en la parte escrita. Ellos debían compartir sus pantallas como condición para iniciar las socializaciones entre pares y docentes, en las que argumentaban cómo iban resolviendo las consignas que ahí se presentaban. Se les pedía explicaciones de por qué escogen una respuesta y no otra, y muchos compañeros intervenían complementando las respuestas de sus compañeros. Todo esto fue de forma oral, dándoles el espacio para que pudieran escribir sus respuestas en el formulario. Mientras se hacía la socialización todos parecían estar claros con las preguntas que se proponían en la actividad 1, pero no fue evidenciado en sus respuestas en el formulario.

FIGURA —— 6
Consolidado de respuestas de la actividad 1



Fuente: elaboración propia (2021).

ACTIVIDAD 2

Las actividades concernientes a la hoja de trabajo 2 fueron aplicadas el 27 de mayo del 2021. Esta permitió que los estudiantes establecieran la relación entre las diferentes representaciones (tabular, gráfica y algebraica) de la función lineal. Se les presenta en un comienzo un video introductorio, después una actividad compuesta de tres partes en GeoGebra y se finaliza con un formulario Google (Anexo 3), planteados en el siguiente orden:

- Se da apertura a la actividad 2 con un video introductorio, el cual le da al estudiante un primer acercamiento a las representaciones de la función lineal, en este se explica cómo tabular datos que están directamente relacionado con la gráfica y la representación algebraica de esta.
- Paso seguido, el estudiante debe desarrollar una serie de actividades de aplicación con el software de GeoGebra; en la primera actividad el estudiante debe construir la gráfica de una función lineal mediante las instrucciones que se encuentran en el applet. En la segunda actividad el estudiante, por medio de la gráfica, debe llegar a la representación algebraica. Por último, el estudiante, a través de la gráfica y la representación algebraica, debe hacer la construcción de la tabla de datos. Estas actividades se hicieron con la guía de las tres docentes presentes en el momento de la aplicación. Debido a que la aplicación se realizó de manera virtual, al azar, se le pidió a los estudiantes presentar sus pantallas para la realización de esta actividad e ir supervisando el desarrollo de la mismas.
- Por último, se encuentra un formulario Google donde el estudiante debe contestar preguntas relacionadas a las construcciones anteriores, y en el cual debe identificar conceptos argumentando sus respuestas.

Objetivos de la actividad 2

- Analizar el manejo de los recursos empleados por los estudiantes de grado octavo en los procesos de construcción y cambio de registro en un contexto algebraico.

- Analizar el impacto que tiene el empleo de hojas de trabajo totalmente virtuales mediadas con herramientas como YouTube, GeoGebra y Google docs.

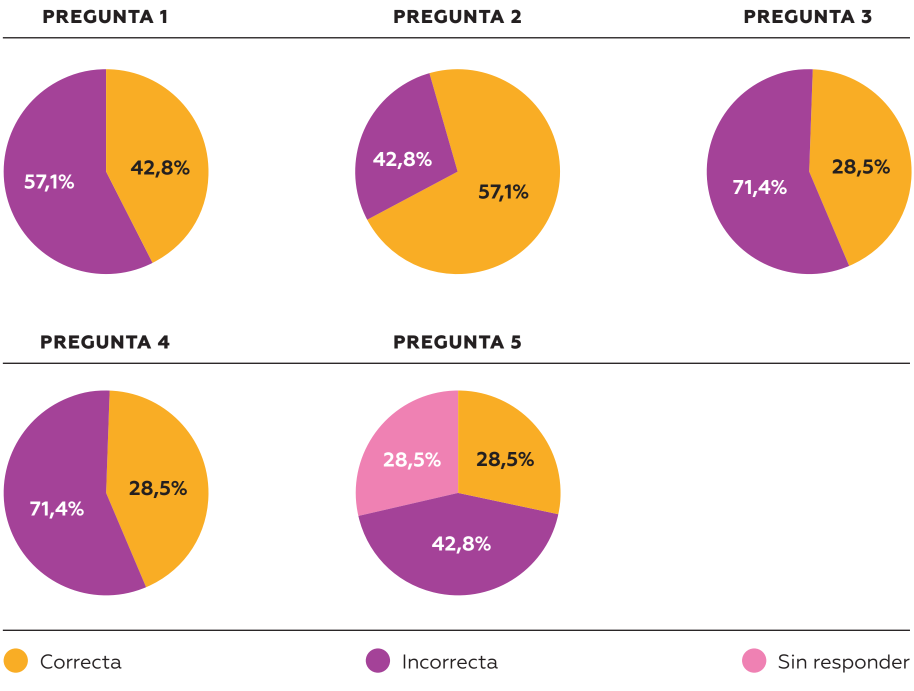
Análisis de la actividad 2

Pregunta 1. Como se observa en la gráfica, contamos con un 42.8 % de respuestas acertadas y un 57.10 % de preguntas incorrectas. Esta pregunta pretendía mostrar si los estudiantes eran conscientes de los datos y/o variables que hacen parte de la función lineal; para evidenciarlo se les preguntó: ¿Qué elementos se necesita para graficar una función en el plano cartesiano?, en principio, vemos que se obtiene por una diferencia de uno un porcentaje más alto en preguntas incorrectas que correctas, lo cual nos puede llevar a deducir que la intención de la pregunta no fue del todo clara, a pesar de que siempre se brindó el apoyo docente en el proceso. Cuando preguntamos al estudiante por los elementos de la función gráfica nos referimos a la pendiente, el corte con el eje “y” y el valor de “x”. Sin embargo, para los estudiantes los conceptos parecen no estar del todo claros.

Pregunta 2. Como se observa en la gráfica, contamos con un 57.10 % de respuestas acertadas y un 42.8 % de preguntas incorrectas. Esta pregunta, al igual que la anterior, es de naturaleza abierta, aun así no nos impide hacer una selección de las preguntas correctas e incorrectas. Esta pregunta pretende visibilizar el paso entre un registro y otro, para ello, se plantea la siguiente pregunta: ¿Qué elementos se necesita para graficar una función en una tabla de valores? Con una notable diferencia entre la pregunta anterior y esta vemos que los estudiantes identifican con facilidad los elementos claves que permiten el cambio de registro.

Pregunta 3. Como se observa en la gráfica, contamos con un 28.5 % de respuestas acertadas y un 71.4 % de preguntas incorrectas. Esta pregunta, de la misma naturaleza que la pregunta 1 y 2, pretendía que el estudiante identificara los elementos necesarios para la representación algebraica de una función, sin embargo, y a pesar de la respuesta de la pregunta anterior, esta obtuvo más número de desaciertos que aciertos, la pregunta planteada fue la siguiente: ¿Qué elementos se necesita para escribir una

FIGURA —— 7
Consolidado de respuestas de la actividad 2



Fuente: elaboración propia (2021).

función en lenguaje algebraico? De acuerdo con esto, podemos analizar que la naturaleza de la formulación de la pregunta desempeña un papel importante en el discernimiento que pueda tener el estudiante a la hora de responder, mas no es la única hipótesis que planteamos, ya que también aludimos esto a la poca claridad respecto a los conceptos.

Pregunta 4. Como se observa en la gráfica, contamos con un 28.5 % de respuestas acertadas y un 71.4 % de preguntas incorrectas. En esta pregunta se le consultaba a los estudiantes si por medio de la gráfica la tabulación o la representación algebraica se podía rastrear el valor de *y* cuando *x=4*. Vemos que existe un empate entre los estudiantes que no acertaron en la respuesta y los que sí lo hicieron. En el análisis se toma como respuesta correcta tres de las dos opciones propuestas. Los resultados a esta pregunta se encuentran registrados en el formulario de Google que fue aplicado, y se elabora una suma de ellos, reflejada en la siguiente gráfica.

Pregunta 5. Como se observa en la gráfica, contamos con un 28.5 % de respuestas acertadas, un 28.5 % de respuestas sin responder y un 42.8 % de preguntas incorrectas En esta pregunta se busca hacer consciente al estudiante de los cambios de registros, la relación entre estos y qué factores le permiten ir de un registro a otro, relacionando esta pregunta con la tercera, en la cual se obtuvo un porcentaje favorable en las respuestas. Vemos que, por el contrario, a la hora de contestar esta pregunta que los estudiantes no hacen evidente los procesos relacionados con el paso entre registros, a pesar de que en la pregunta tres parecían evidenciarlos; sin embargo, esto podría deberse a que los estudiantes presenten dificultades para hacer explícitos los aspectos que permiten ir de un registro a otro, como es evidente en la gráfica, la cual muestra que el porcentaje de preguntas incorrectas y sin responder supera a las preguntas correctas.

ACTIVIDAD 3

La actividad 3 de la hoja de trabajo se aplicó el 27 de mayo de 2021. Esta actividad permitió que los estudiantes pudieran explorar sobre los elementos principales de la función lineal, siendo uno de estos la variable dependiente, variable independiente, ecuación lineal, lenguaje algebraico y el lenguaje natural o común.

Esta actividad 3 constaba de siete ejercicios diseñados en GeoGebra. Antes de que los estudiantes la desarrollaran, se les pidió observar dos videos que les permitirían comprender mejor los temas que se abordan en la actividad propuesta. Cabe considerar que esta actividad 3 no tiene formulario, porque se quería llegar a que los estudiantes interactuaron con el applet, con el fin de que respondiera o argumentaran directamente en la actividad. Las preguntas se respondieron entre pares de estudiantes y entre docente-estudiante.

Objetivo de la actividad 3

- Analizar cómo comprenden y argumentan el significado de la variable dependiente e independiente.
- Analizar cómo comprenden los estudiantes de grado octavo el concepto de ecuación lineal.
- Analizar cómo comprenden los estudiantes de grado octavo la diferencia entre el lenguaje algebraico y el lenguaje natural o común.

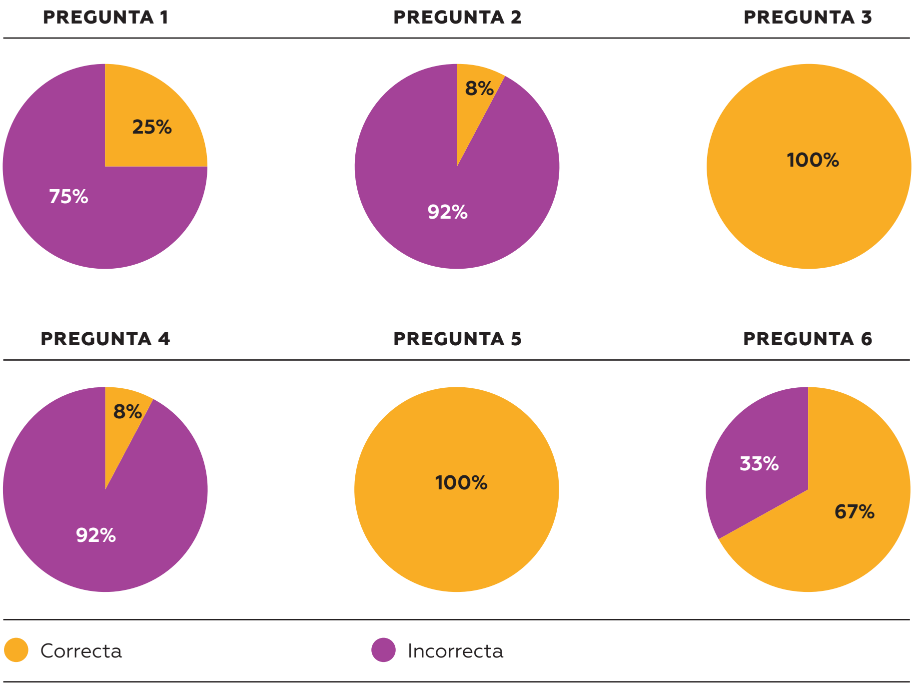
Análisis actividad 3

Esta actividad se centra en la argumentación, lo cual le permite al estudiante conjeturar. Aquí, el estudiante va a encontrar en el applet un personaje que lo llevará por un recorrido para explorar en diferentes fotografías de diferentes contextos los conceptos de variable dependiente y variable independiente, con el fin de que los estudiantes asimilen la diferencia y la relación que estos dos conceptos tienen. Después, se les dará una serie de ecuaciones lineales para que las desarrollen y coloquen los resultados. Por último, se quiere que los estudiantes transformen el lenguaje común en un lenguaje algebraico.

Pregunta 1. Al momento de desarrollar la actividad 3 con los estudiantes se observó que el 75 % de los estudiantes no tenía claridad sobre el significado del concepto variable dependiente x variable independiente, porque no tenían claridad en la argumentación que establecen, mientras que el 25 % estudiantes tenía la idea, pero faltaba más claridad.

Pregunta 2.1. En la segunda pregunta, los estudiantes, a partir de la observación, van a establecer qué oración tiene más sentido, es decir, que variable depende de otra y van a señalar la respuesta correcta. En la primera oración todos los estudiantes señalaron correctamente la respuesta, argumentando que no era posible que el peso de una persona dependiera de la estatura, porque la persona podría pesar mucho y ser de una estatura muy bajita, por esta razón descartaron la primera opción porque no tenía sentido, mientras que en la segunda opción los estudiantes argumentaron que la estatura de una persona sí depende del

FIGURA —— 8
Consolidad de respuestas de la actividad 3



Fuente: elaboración propia (2021).

peso, porque a partir de lo que la persona mida el peso dependerá de esta. Es por esto que se determinó que el 100 % de estudiantes contestó acertadamente.

Pregunta 2.2. En la segunda oración los estudiantes utilizaron la misma lógica para responder y argumentar, donde establecieron como respuesta correcta que la cantidad de leche que se obtenga depende de la cantidad de vacas que tenga. Es por esto que se determinó que el 100 % de estudiantes contestó acertadamente.

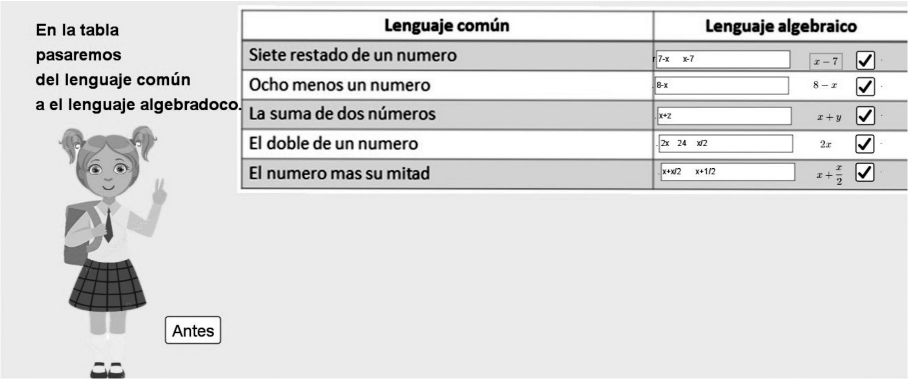
Pregunta 2.3. En esta oración, el 92 % de los estudiantes argumentó que ambas oraciones eran correctas, porque la probabilidad de padecer cáncer de pulmón depende de la cantidad de cigarrillo que consuma diariamente, y también es igual que el número de cigarrillos que consume la persona diariamente dependerá del cáncer de pulmón. Al observar lo anterior, los estudiantes presentan falencias en la comprensión lectora, ya que la pregunta hacía referencia a cuál de las dos oraciones tenía más sentido, pero un 8 % de estudiante argumentó lo contrario, donde decía que la oración que tenía más sentido era la siguiente: *la probabilidad de padecer cáncer de pulmón depende de la cantidad de cigarrillo que consuma diariamente la persona*, donde argumentó que si una persona va al médico y le envía un examen (tomografía) para ver qué tiene y el examen manifiesta que tiene cáncer de pulmón es evidente que es causado por la cantidad de cigarrillo que consuma diariamente la persona. Esta respuesta es válida porque, de cierta manera, comprendió los conceptos inmersos en el contexto y las oraciones dadas.

Pregunta 3. Cuando los estudiantes observaron las ecuaciones lineales en la imagen anterior, se notó una gran dificultad, porque solo una estudiante pudo realizar las ecuaciones lineales presentadas dando su respectivo resultado. Se evidenció que el 8 % de los estudiantes pudo realizar de manera correcta las ecuaciones lineales y que el 92 % no sabía o no se acordaba cómo se realizaban estas ecuaciones. Esto nos permitió comprender que gran parte de los estudiantes presenta unas falencias en la resolución de un ejercicio.

Pregunta 4. Los estudiantes manifiestan algunas dificultades de comprensión lectora, porque en el momento de transformar el lenguaje común al lenguaje algebraico tienen muchas dudas y errores en la comprensión. Dado lo anterior, con ayuda del docente, se orientó a los estudiantes a una mejor interpretación de las oraciones dados, con el fin de que los estudiantes construyeran su propio proceso de aprendizaje.

En la imagen podemos notar dos ejemplos de los errores que establecieron los estudiantes. El primero es la consigna que dice *"el doble de un número"*. Los estudiantes decían que se podía representar en el lenguaje algebraico de la siguiente manera: 24,2x o^x. De estas tres formas los estudiantes transformaron la oración que estaba en un lenguaje común a un lenguaje algebraico. Se puede observar que los estudiantes que dijeron que esa oración queda de la forma 24 o^x tienen ciertas falencias cognitivas. Por otro lado, los estudiantes que dijeron que esa oración queda de la forma 2x tienen claridad en la transformación establecida.

FIGURA —— 9
Respuestas actividad 3, pregunta 4



Fuente: elaboración propia (2021).

El segundo ejemplo es el de la consigna que dice "*el número más su mitad*". Los estudiantes decían que se podía representar en el lenguaje algebraico de la siguiente manera: ½ $x + {}^{x}$ *o* $x +$. De estas dos formas los estudiantes transformaron la oración que estaba en un lenguaje común a un lenguaje algebraico. Se observa que los estudiantes que dijeron que esa oración queda de la forma $x +$ ½ tienen ciertas falencias de comprensión lectora. Por otro lado, los estudiantes que dijeron que esa oración queda de la forma $x + {}^{x}$ tienen claridad en la transformación establecida.

EVALUACIÓN FINAL

Para la evaluación final se hizo una prueba en un formulario de Google recopilando las preguntas que se habían hecho en las actividades anteriores junto con la prueba diagnóstica que habían presentado al inicio.

La idea es poder hacer un análisis comparativo de "cómo llegaron" los estudiantes antes de iniciar las actividades y "cómo quedaron" al finalizarlas, y para ello se realizó la siguiente tabla que permite visualizar si los objetivos de aprendizaje inmersos en las actividades tuvieron éxito.

TABLA —— 2
Cuadro comparativo entre la Prueba Diagnóstica y la Evaluación Final

ACTIVIDADES	PRUEBA DIAGNÓSTICA	EVALUACIÓN FINAL
Actividad 1 En esta actividad se consolida todo lo relacionado con la pendiente, constante y variable de una función lineal.	En el primer grupo de preguntas encontramos que son de naturaleza puramente conceptual, en las cuales se le pregunta al estudiante sobre qué es una función lineal y por la naturaleza de cada uno de sus componentes. En el análisis de estas preguntas encontramos un total desconocimiento de estos conceptos por parte de los estudiantes.	En la prueba final evaluamos de manera similar a la prueba diagnóstica, por tanto, en este primer ítem hablamos de las preguntas de índole conceptual, en las que, a pesar de que no todos los estudiantes lograron la construcción del objeto matemático, encontramos un cambio sustancial en una buena parte de los estudiantes respecto a las concepciones correspondientes a la función lineal y la naturaleza de sus componentes.
Actividad 2 En esta actividad se consolida todo lo relacionado con los diversos tipos de representación de una función lineal.	El segundo grupo de preguntas tiene que ver con las representaciones de la función lineal y el papel que desempeña cada uno de los componentes de esta en las diversas representaciones. Al igual que en el grupo de preguntas anterior, encontramos que para los estudiantes no hay una relación entre las representaciones o simplemente no es claro para ellos qué se quiere decir cuando se habla de representaciones.	En este segundo aspecto, que está relacionado con las diferentes representaciones de la función lineal, vemos que los estudiantes reconocen los factores fundamentales de la función lineal y el papel que estos desempeñan en las representaciones y cómo se puede pasar a diversos registros de representación.

Actividad 3 En esta actividad se consolida todo lo relacionado con las variables dependientes e independientes, el paso de registros de representación alrededor del lenguaje y la solución de ecuaciones lineales.	En este último grupo de preguntas se hace referencia al paso del lenguaje natural al algebraico, la relación entre variable dependiente e independiente y la solución de ecuaciones lineales. En las respuestas dadas por los estudiantes observamos que no es clara la diferencia entre lenguaje algebraico y natural, por lo que no saben cómo saltar de un registro al otro. También se pudo analizar que no tenían claridad sobre la relación de las variables de una función ni cómo transformarlas de un lenguaje a otro.	Este último grupo de preguntas, fundamental en la resolución de problemas, observamos que a pesar de que en un principio los estudiantes no establecían una relación entre el lenguaje natural y algebraico, vemos de una manera favorable los resultados obtenidos en este aspecto, debido a que llegaron al punto de poder argumentar por qué era una respuesta y no la otra. También, la mayoría de estudiantes logró establecer la relación entre las variables dependiente e independiente.

Fuente: elaboración propia (2021).

Se puede notar un cambio considerable en la argumentación de sus respuestas y en cómo las abordan respecto a los formularios que habían llenado anteriormente. A pesar de que no todos los estudiantes llegaron a establecer la relación de la pendiente, constante y variables, se puede determinar que la mayoría de estudiantes sí lo logró. Que las actividades y las herramientas de apoyo sirvieron para que el estudiante pudiera llegar a la mayoría de objetivos de la hoja de trabajo.

Incluso, aún con sus respuestas incorrectas, hacían alusión a elementos de la función lineal y mejor argumentadas que en los formularios pasados.

También podemos ver que los diversos tipos de representación que tiene una función fueron los conceptos más claros que obtuvieron y que encontraron con más familiaridad al representar la función que al entender cómo se componía. Sin embargo, al momento de resolver una función algebraicamente se encontraron, hasta el final, muchas falencias para despejar una ecuación. Necesitaron de mucha guía para llegar a los resultados. Adicionalmente, se evidenció que para las respuestas de la prueba final no tomaron información de internet, sino que fueron totalmente transparentes con lo que sabían o no.

¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

Una de las lecciones aprendidas es que debido a las diversas dificultades de conectividad y de comunicación existente entre los estudiantes y nosotras, quienes éramos las encargadas de guiar la actividad, detectamos varias falencias e inconsistencias en las respuestas de los estudiantes, ya que en varias ocasiones recurrieron al internet para dar las definiciones, restándole importancia al proceso llevado a cabo en la applet, lo cual nos sugiere dos cosas: la primera es que el diseño de las tareas en la applet no fue suficiente para generar en los estudiantes un proceso cognitivo inductivo; la segunda fue que el uso del internet para dar las respuestas a significados opacó los razonamientos a los que hubiesen podido llegar los estudiantes, ya que conceptualizaciones tan elaboradas pueden dejar más vacíos de los esperados en el estudiante.

Además, partiendo de la recolección de datos hecha en la actividad 2, observamos que en esta no todos los estudiantes alcanzaron los objetivos de aprendizaje propuestos por la misma; No obstante, cuando se hace el rastreo de estos mismos objetivos en la prueba final, la cual tiene como objetivo principal evidenciar el conglomerado de aprendizajes desarrollados a lo largo de la hoja de trabajo, fraccionada en tres actividades, encontramos que en esta las respuestas que los estudiantes construían en relación con las representaciones de la función lineal eran más elaboradas y mejor sustentadas, reconociendo en gran parte los factores fundamentales en los diferentes registros y el rol que juega cada uno al transitar entre un registro y otro; por tanto, podríamos afirmar que los objetivos propuestos se alcanzaron de una manera parcial por parte de los estudiantes, y que es necesario repensarse la hoja de trabajo de tal manera que se puedan llenar los vacíos conceptuales suscitados alrededor del objeto matemático, asimismo, es prudente tener en cuenta las falencias que aún, y a pesar de un años en la dinámica de la educación virtual, persisten.

Para finalizar, es importante tener claro varias desventajas que hay sobre las aplicaciones que se hacen totalmente en la virtualidad, debido a que debemos confiar en la disposición, responsabilidad y compromiso de los estudiantes para responder de manera oral o escrita, y lamentablemente no siempre se obtiene eso, ya sea porque no tienen esas actitudes o porque realmente tengan fallas en el internet o en sus equipos de trabajo, y uno debe ser flexible frente a eso, situación que no se presentaría al ser presencial y tener un acompañamiento más directo.

FIGURA — 10
Collage de estudiantes presentado la aplicación

Fuente: elaboración propia (2021).

ANEXOS

ANEXO —— 1
Prueba diagnóstica

PRUEBA DIAGNOSTICA

*Obligatorio

NOMBRE COMPLETO *

Tu respuesta

FECHA *

Tu respuesta

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN Y CUÁL ES SU FORMULA GENERAL? *

Tu respuesta

¿CUÁLES SON LAS CARACTERISTICAS DE UNA FUNCIÓN LINEAL? *

Tu respuesta

¿QUÉ ES UNA PENDIENTE? *

Tu respuesta

¿CUÁLES SON LAS CARACTERISTICAS DE LA PENDIENTE? *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDE POR UNA RECTA? *

Tu respuesta

¿QUÉ PAPEL JUEGA LA CONSTANTE EN LA FUNCIÓN? *

Tu respuesta

¿QUÉ TIPO DE REPRESENTACIONES TIENE UNA FUNCIÓN LINEAL? DÉ EJEMPLOS. *

¿QUÉ PAPEL JUEGA LA CONSTANTE EN LA FUNCIÓN? *

Tu respuesta

¿QUÉ TIPO DE REPRESENTACIONES TIENE UNA FUNCIÓN LINEAL? DÉ EJEMPLOS. *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDES POR VARIABLE DEPENDIENTE? *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDES POR VARIABLE INDEPENDIENTE? *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDES POR VARIABLE DEPENDIENTE? *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDES POR VARIABLE INDEPENDIENTE? *

Tu respuesta

¿CUÁL ES LA DIFERENCIA QUE HAY ENTRE EL LENGUAJE ALGEBRAICO Y EL LENGUAJE COMÚN? *

Tu respuesta

¿QUÉ ENTIENDEN POR PUNTO DE ORIGEN? *

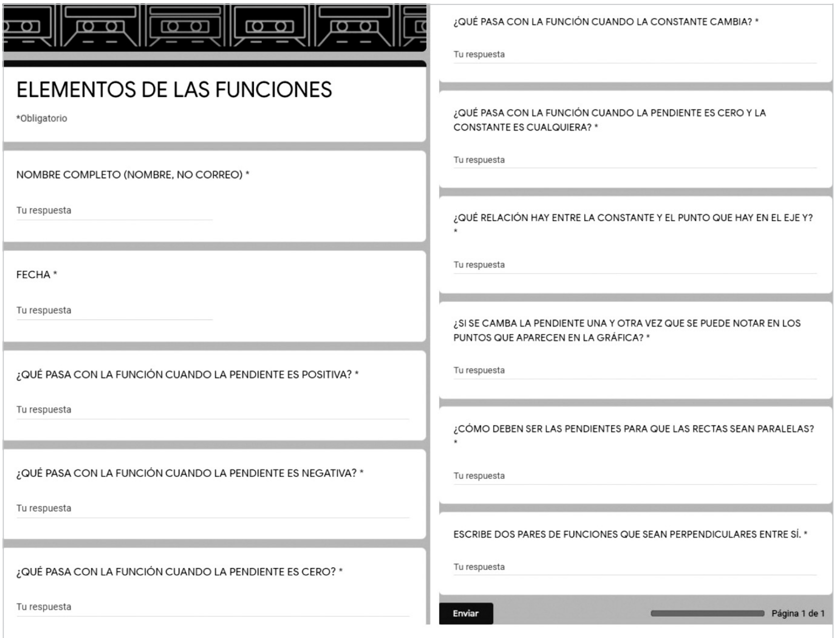
Tu respuesta

¿CUÁLES SON LAS DIVERSAS REPRESENTACIONES QUE TIENE LA FUNCIÓN? *

Tu respuesta

Enviar

ANEXO —— 2
Hoja de trabajo (actividad 1)



ELEMENTOS DE LAS FUNCIONES

*Obligatorio

NOMBRE COMPLETO (NOMBRE, NO CORREO) *

Tu respuesta

FECHA *

Tu respuesta

¿QUÉ PASA CON LA FUNCIÓN CUANDO LA PENDIENTE ES POSITIVA? *

Tu respuesta

¿QUÉ PASA CON LA FUNCIÓN CUANDO LA PENDIENTE ES NEGATIVA? *

Tu respuesta

¿QUÉ PASA CON LA FUNCIÓN CUANDO LA PENDIENTE ES CERO? *

Tu respuesta

¿QUÉ PASA CON LA FUNCIÓN CUANDO LA CONSTANTE CAMBIA? *

Tu respuesta

¿QUÉ PASA CON LA FUNCIÓN CUANDO LA PENDIENTE ES CERO Y LA CONSTANTE ES CUALQUIERA? *

Tu respuesta

¿QUÉ RELACIÓN HAY ENTRE LA CONSTANTE Y EL PUNTO QUE HAY EN EL EJE Y? *

Tu respuesta

¿SI SE CAMBA LA PENDIENTE UNA Y OTRA VEZ QUE SE PUEDE NOTAR EN LOS PUNTOS QUE APARECEN EN LA GRÁFICA? *

Tu respuesta

¿CÓMO DEBEN SER LAS PENDIENTES PARA QUE LAS RECTAS SEAN PARALELAS? *

Tu respuesta

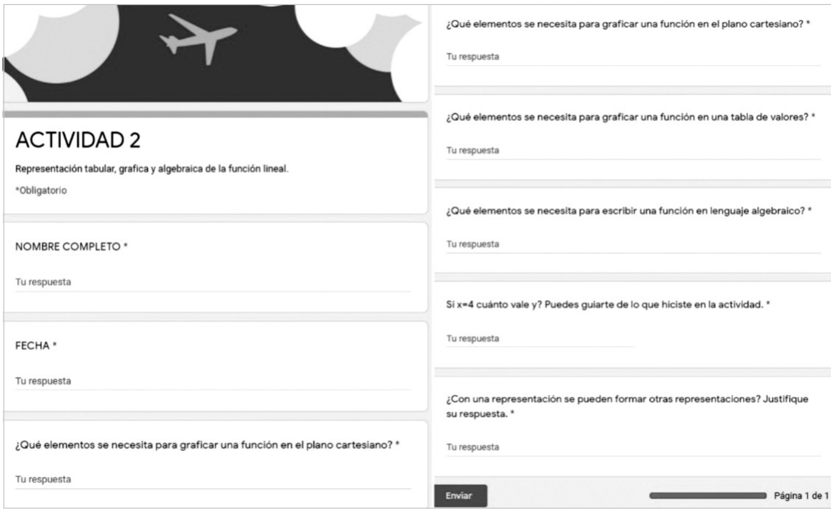
ESCRIBE DOS PARES DE FUNCIONES QUE SEAN PERPENDICULARES ENTRE SÍ. *

Tu respuesta

Enviar

Página 1 de 1

ANEXO —— 3
Hoja de trabajo (actividad 2)



ACTIVIDAD 2

Representación tabular, grafica y algebraica de la función lineal.

*Obligatorio

NOMBRE COMPLETO *

Tu respuesta

FECHA *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para graficar una función en el plano cartesiano? *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para graficar una función en el plano cartesiano? *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para graficar una función en una tabla de valores? *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para escribir una función en lenguaje algebraico? *

Tu respuesta

Si x=4 cuánto vale y? Puedes guiarte de lo que hiciste en la actividad. *

Tu respuesta

¿Con una representación se pueden formar otras representaciones? Justifique su respuesta. *

Tu respuesta

Enviar

Página 1 de 1

ANEXO —— 4
Hoja de trabajo (evaluación final)

EVALUACIÓN FINAL

*Obligatorio

NOMBRE COMPLETO *

Tu respuesta

FECHA *

Tu respuesta

SI TENEMOS LA FUNCIÓN y=mx+b ¿QUÉ SIGNIFICA CADA LETRA? *

Tu respuesta

¿QUÉ ES UNA PENDIENTE? *

Tu respuesta

¿CUÁLES SON LAS CARACTERISTICAS DE LA PENDIENTE? *

Tu respuesta

¿QUÉ PAPEL JUEGA LA CONSTANTE EN LA FUNCIÓN? *

Tu respuesta

¿CÓMO DEBEN SER DOS RECTAS PARA QUE SEAN PARALELAS? *

Tu respuesta

¿CÓMO DEBEN SER DOS RECTAS PARA QUE SEAN PERPENDICULARES? *

Tu respuesta

¿QUÉ TIPO DE REPRESENTACIONES TIENE UNA FUNCIÓN LINEAL? DÉ EJEMPLOS. *

¿Qué elementos se necesita para graficar una función en el plano cartesiano? *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para graficar una función en una tabla de valores? *

Tu respuesta

¿Qué elementos se necesita para escribir una función en lenguaje algebraico? *

Tu respuesta

Da un ejemplo donde se identifique la variable dependiente e independiente. *

Tu respuesta

DA 2 EJEMPLOS DE FUNCIONES QUE SE PUEDAN EXPRESAR EN LENGUAJE ALGEBRAICO Y EN LENGUAJE COMÚN *

Tu respuesta

¿Por qué el peso de una persona depende también de su estatura? ¿Por qué no la estatura de una persona depende también de su peso? *

Tu respuesta

¿Es correcto decir que la cantidad de vacas que se tenga, depende de la cantidad de leche que se obtenga? ¿Por qué? *

Tu respuesta

¿Cómo se halla el valor de "y"? *

Tu respuesta

ANEXO —— 5
Hoja de trabajo (sitio web: Función Lineal)

REFERENCIAS

POLYA, G. (1965). *¿Cómo plantear y resolver problemas de matemáticas?* Trillas.

BENÍTEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios de primer año en la resolución de problemas con tecnología digital* [tesis doctoral).

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA. Cinvestav. México.

CAPÍTULO 4: EXPERIENCIAS SIGNIFICATIVAS EN EL NIVEL SUPERIOR

El presente es el cuarto y último capítulo de este libro. Tiene como propósito central presentar resultados de investigaciones en educación matemática en el nivel superior.

El capítulo está compuesto por cuatro trabajos y en esta sección se hace una breve descripción de cada uno de ellos. Las ocho autoras de los capítulos son profesoras de matemáticas que trabajan en instituciones Educación Superior en Colombia, Perú y Uruguay. Este hecho nos dio la oportunidad de abrir una colaboración académica de internacionalización en la comunidad latinoamericana.

El primer artículo tiene por título Una experiencia de aprendizaje con GeoGebra classroom en formación de profesores de matemática**.** El trabajo es el resultado de una investigación con futuros profesores de matemáticas al utilizar del GeoGebra classroom para explorar y construir paralelogramos. El objetivo del artículo fue documentar un ambiente de aprendizaje donde los futuros profesores interactúan con actividades de aprendizaje en las cuales pueden utilizar GeoGebra y además identificar cuáles son las posibles dificultades y ventajas de su incorporación.

El segundo artículo se denomina *Estimación del área del lago en forma de corazón una experiencia mediada por GeoGebra* tiene como objetivo analizar la implementación de las hojas de trabajo diseñadas en el marco del curso Cálculo de una variable donde se promueve el desarrollo de las competencias de comunicación y modelación a través de un problema en un contexto real

El objetivo del capítulo denominado Solución de un problema de optimización con ayuda de GeoGebra fue analizar las estrategias que utilizaron estudiantes del curso Cálculo 1 de la de una situación problema dada, apoyándose en el *software* GeoGebra y sus conocimientos previos sobre geometría, trigonometría, física y cálculo diferencial.

El artículo *denominado La resolución de problemas en contexto real con la mediación de GeoGebra* , es el resultado de dos proyectos de investigación comparativos, uno en el nivel de la media vocacional y otro en el nivel superior. Los proyectos tienen objetivos, enfoques teóricos, diseños metodológicos y actividades de aprendizajes similares para poder establecer comparaciones. El objetivo principal de los proyectos es documentar el impacto que tiene el uso sistemático de la tecnología computacional en la resolución de problemas en contexto real con la mediación de GeoGebra.

EXPERIENCIA 1

Una experiencia de aprendizaje con GeoGebra classroom en formación de profesores de matemática

ELENA FREIRE-GARD
CINTYA GONZALES HERNÁNDEZ
ONEIDA QUIROGA GONZÁLEZ

RESUMEN

Este artículo reporta una primera experiencia de aprendizaje de futuros profesores de matemática al utilizar un *applet* de GeoGebra para explorar y construir paralelogramos. El objetivo de su implementación fue posibilitar a futuros profesores vivenciar desde dos roles simultáneamente (el del estudiante y del profesor) qué ocurre al utilizar un software de geometría dinámica como GeoGebra y además identificar cuáles son las posibles dificultades y ventajas de su incorporación. Los futuros profesores, en primera instancia, analizaron la funcionalidad del instrumento, exploraron las herramientas e intercambiaron ideas y presentaron diferentes estrategias de construcción. Se concluye que la experimentación permitió que los futuros profesores descubrieran las posibilidades que ofrece el software de geometría dinámica y a la vez pudieran darse cuenta de los posibles inconvenientes que pueden surgir y las preguntas que podrían hacer sus estudiantes.

PALABRAS CLAVE

Resolución de problemas, geometría, formación de profesores

¿DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

La institución educativa donde se realizó la experiencia de aula fue el Instituto de Profesores Artigas en Montevideo (Uruguay), institución pública de nivel terciario que forma a los futuros profesores de Enseñanza Media. Esta Institución tiene más de 5000 estudiantes. En Uruguay, la Enseñanza Media o Educación Secundaria consta de 6 años, los primeros tres años se le llama Educación Media Básica, y son de carácter obligatorio, los últimos tres años se denominan Bachillerato. La formación de profesores en Uruguay tiene una duración de cuatro años. El requisito para que los estudiantes ingresen al plan de estudios de formación de profesores es tener aprobado bachillerato. Las edades de los estudiantes son muy variadas (18-59 años), en algunos casos quienes se inscriben en dicha formación recién han egresado como bachilleres, en otros casos ya han transitado por otras universidades o han culminado otras carreras universitarias.

La formación de profesores incluye en su plan de formación tres dimensiones: una pedagógica de formación general, otra específica de la asignatura para la que se forma el futuro profesor y formación didáctica que se acompaña con la práctica docente. Presenta tres cursos anuales de didáctica: Didáctica I, Didáctica II y Didáctica III. Particularmente la experiencia que se realizó fue en un curso de Didáctica II de formación de profesores de matemática que corresponde al 3er año de formación docente. La carga horaria es de 2 horas semanales y la práctica docente tiene 5 horas de clase de 45 minutos cada una. Cuando la experiencia fue realizada correspondió a una primera clase de Didáctica II en un contexto de Pandemia en que las clases se estaban dando en forma virtual. Particularmente la profesora formadora dio sus clases por videoconferencia por Zoom y a la vez trabajó con una plataforma virtual Schoology del Consejo de Formación en Educación.

El grupo donde se describe la investigación está conformado por cuatro estudiantes, dos de ellos con bachillerato aprobado, y otros dos estudiantes tienen carreras universitarias culminadas. Uno de los futuros profesores es arquitecto de profesión, con ocho años de experiencia dando clases de matemáticas, otro es ingeniero en electrónica, sin grupos a cargo de educación secundaria. Los otros dos futuros profesores tampoco tienen grupo a cargo, ni lo han tenido hasta el momento. La profesora formadora del curso es la primera autora de este artículo. En su labor, realiza también al menos tres visitas de aula al futuro profesor para observar su desempeño al realizar la práctica docente. Este hecho motivó esta experiencia para ofrecerles una oportunidad de mejorar las prácticas de enseñanza de la matemática en la virtualidad.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

El aprendizaje de las matemáticas se ha visto favorecido por las posibilidades que ofrecen las Tecnologías Digitales para su enseñanza (Artigue, 2015, 2016; Drijvers et al., 2016). Entre los beneficios que han sido identificados, Shieh y Yu (2016) encontraron que estos instrumentos permiten desarrollar el pensamiento reflexivo, el trabajo interpersonal y también la cooperación entre estudiantes como sugiere Artigue (2016). Asimismo, a pesar de las posibilidades que ofrecen los recursos tecnológicos para enseñar, se han observado dificultades para concretar su uso en la clase de matemáticas (Carmona y Villa Ochoa, 2019). En los hechos, ha ocurrido que algunos docentes no logran concretar su inclusión en el aula, pues no se sienten capacitados para utilizar software específicos para enseñar matemática (Padilla, 2020). Tal vez uno de los motivos que impide a los profesores aprovechar la potencialidad de las Tecnologías Digitales en la enseñanza de la matemática, sea la dificultad que implica incluir recursos tecnológicos en el aula (Healy y Lagrange, 2010). Otros autores (Artigue, 2014; Farfán, 2015; Téliz, 2015, Kafyulilo y Tilya, 2018) han dado cuenta que a pesar de que los recursos tecnológicos son incluidos en el aula se observan reproducciones de clases tradicionales. Sin embargo, Borba y Villarreal (2006) reconocen que es posible lograr metodologías de enseñanza de indagación que involucran la exploración y deducción por parte de los estudiantes.

En el contexto de la Pandemia mundial generado por el COVID-19 se hace imperioso incluir recursos tecnológicos para enseñar matemáticas. Sin embargo, es necesario que el profesor tome conciencia que la enseñanza virtual es diferente a la enseñanza presencial y que esta requiere de aprendizaje tanto para el profesor como para los estudiantes (Hodges et al., 2020). Por ello, es necesario considerar y aprovechar los beneficios que pueden brindar las tecnologías para enseñar matemática, ya que estos recursos permiten abarcar diferentes niveles de aprendizaje e incluir actividades con diferentes grados de dificultad. Adicionalmente, el software GeoGebra ofrece al usuario la posibilidad de utilizar en forma simultánea diversos registros de representación (tabular, gráfica, verbal y simbólica), los mismos favorecen la comprensión de los conceptos matemáticos que se trabajan. Cabe tomar en cuenta que "la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados" (Duval, 2006, p. 145).

Algunos beneficios del uso del software de geometría dinámica GeoGebra son explicitados por Carrillo (2019). Entre ellos, este autor destaca "la mejora de los métodos de exposición del profesor, aumenta la interacción del estudiante con conceptos matemáticos, es un software libre, es multiplataforma y multidispositivo" (Carrillo, 2019, p. 53). Por otra parte, Carrillo manifestó que el rol docente necesita transformarse a partir de introducir modificaciones en la gestión del aula y también en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Posiblemente si el rol del docente es facilitador para el aprendizaje de sus estudiantes, estos puedan incorporar actitudes de indagación y exploración al resolver problemas matemáticos. En este sentido es que el software GeoGebra permitirá a los estudiantes intervenir en actividades que le generen mayor protagonismo y de esta forma les posibilitará hacer matemática.

Asimismo, entre otras de las ventajas de usar el software de geometría dinámica GeoGebra, Sandoval y Moreno (2012) identifican como un aporte que ofrece la "representación dinámica en la cual las propiedades geométricas permanecen inalterables cuando los objetos se deforman según el arrastre" (p. 22). Estos autores coinciden en que la posibilidad dinámica posibilita la experimentación de los estudiantes que les permite descubrir e internalizar lo que aprenden. A su vez, cuando el estudiante visualiza mediante el software diferentes construcciones y hace intervenir las propiedades de las figuras geométricas, va enriqueciendo las imágenes mentales sobre los objetos geométricos (Vinner, 1991). Otro de los aspectos que destacan estos autores al incluir GeoGebra es que "el razonamiento geométrico puede verse enriquecido por las formas de argumentación que se hacen viables al acercar la percepción y el razonamiento" (Sandoval y Moreno, 2012, p. 23).

También, es necesario considerar la importancia de involucrar a los futuros profesores en procesos activos de aprendizaje, para que ellos puedan desarrollar estas modalidades de enseñanza. En este sentido, De Guzmán (2007) sugirió que el alumno vivencie "un proceso semejante al seguido en la creación de las ideas matemáticas" (p. 29), en forma similar a lo que lo hicieron los matemáticos al enfrentarse a nuevos problemas.

En consideración a los aportes anteriores en este artículo nos proponemos como objetivo: analizar el proceso de génesis instrumental que vivencian cuatro futuros profesores de matemáticas que cursan Didáctica II al experimentar el uso de un *applet* diseñado con GeoGebra al construir paralelogramos.

Los conocimientos previos de los futuros profesores caso de estudio

Con el fin de indagar sobre los conocimientos previos de los futuros profesores se aplicó un cuestionario. El mismo fue realizado en Google forms y fue respondido al comienzo de la primera clase de Didáctica II. Los datos obtenidos en el cuestionario evidenciaron que no se habían desarrollado los conocimientos de los futuros profesores referentes a la implementación de los recursos tecnológicos para enseñar matemática. El uso real que efectivamente implementaron en su práctica docente estaba restringido a temas puntuales o ejemplos concretos.

En particular, los 4 estudiantes que comenzaron el curso en marzo de 2021 ninguno había tenido experiencia previa en enseñanza virtual. Ni siquiera habían cursado Didáctica en el año 2020, cuestión que hubiera sido un primer antecedente de experiencia sobre el uso de recursos tecnológicos.

Los datos que se identificaron a partir de las respuestas de los futuros profesores fueron muy disímiles. El estudiante 1 (FP1), arquitecto de profesión, con 8 años de experiencia dando clases, expresó que había usado "deslizadores, rastro, muy útil para trabajar lugares geométricos" y en la "variación de la pendiente de la gráfica de una función lineal y variación de una recta tangente al gráfico de una función". Un segundo estudiante de profesorado (FP2), ingeniero en electrónica de profesión, expresó que "como practicante" usó recursos tecnológicos "para desarrollos de poliedros y tarjetas de juegos que luego produjo en cartulina" y manifestó ser "un autodidacta en casi todas las herramientas de uso virtual". Un tercer estudiante (FP3) indicó haber usado recursos digitales en "lugares geométricos y funciones". Finalmente, un cuarto estudiante de profesorado (FP4) usó estos recursos en "la práctica docente en el tema ecuaciones de la recta y sistema de ecuaciones". Estas respuestas muestran visiones muy fragmentadas del uso de un recurso de geometría dinámica como GeoGebra.

Sin embargo, cuando se les preguntó ¿cuáles fueron los recursos que incluyeron en su práctica docente? especificaron: "proyector", "calculadora, GeoGebra (para graficar rectas, observar corte entre rectas...)" (FP4), "el pizarrón, juegos de mesa, materiales de mi propia elaboración, ThatQuiz" (FP2), "solo en la sala de informática ya que no disponía de computadoras, utilicé GeoGebra para trabajar lugar geométrico" (FP3). Estas respuestas nos hacen pensar sobre el poco uso de los recursos tecnológicos por parte de los futuros profesores en su práctica docente.

A su vez, al indagar sobre las percepciones que los futuros docentes tenían de las tecnologías digitales para enseñar matemática se encontró que: "puede ser un factor de motivación para los alumnos, me gustaría hacer alguna capacitación y de esta forma poder implementarla de formas adecuadas" (FP1), "me resultan atractivas y creo que están en buena sintonía con los intereses de los estudiantes actuales, que han crecido junto con las tecnologías de la información", "considero que son útiles para visualizar, [...] y que tendrían que tener un papel importante en los cursos de educación secundaria, [...] son buenos soportes para la experimentación e indagación" (E4); pero a la vez identifican "problemas de infraestructura de aula no siempre acordes con el uso de tecnología" (FP2).

Metodología de trabajo

Esta investigación es de corte cualitativo y se basa en un estudio de caso. El caso de estudio está integrado por cuatro futuros profesores que cursan Didáctica II en el 3er año de formación de Profesores de matemáticas de una Institución Educativa pública de nivel terciario en Uruguay. El aprendizaje del rol de profesor se produce en forma conjunta con la práctica docente y el curso teórico de Didáctica. A su vez el profesor formador va a observar la práctica del futuro docente a fin de ver cómo se va moldeando el futuro rol docente.

El enfoque cualitativo que se ha considerado permite "describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes" (Hernández Sampieri et al., 2014, p. 11). Asimismo, se busca explorar los fenómenos “desde la perspectiva de los participantes en un ambiente natural y en relación con su contexto” (Hernández Sampieri, 2014, p. 358). Se incluye un estudio de caso en que la muestra es una sola unidad de análisis, “los estudios de caso son utilizados para investigar cuestiones de aprendizaje de estudiantes, así como el conocimiento y las prácticas profesionales de profesores...” (Ponte, 2006, p. 3).

Los instrumentos utilizados para recabar datos fueron: cuestionario en Google forms, *applet* creado en GeoGebra, alojado en la plataforma (<www.geogebra.org>), grabación de clases de didáctica, archivos enviados por los estudiantes como registro escrito de la actividad realizada con GeoGebra.

Una de las investigadoras (primera autora de este artículo) cumple un doble rol, el de ser profesora formadora de los futuros profesores, caso de estudio, y a la vez investigadora.

En la primera clase de Didáctica dada por videoconferencia por Zoom, la profesora formadora propuso a los estudiantes un cuestionario para indagar sobre los conocimientos previos del uso de los recursos tecnológicos para enseñar matemática. Algunas de las preguntas buscaron triangular las respuestas que dieron los futuros profesores respecto de la implementación efectiva en la práctica docente de los recursos tecnológicos. En segundo lugar, se envió por chat de Zoom el link para que los propios estudiantes pudieran acceder al *applet* creado con GeoGebra, alojado en la plataforma <www.geogebra.org>. Luego se mostró a los futuros profesores cómo crear una clase haciendo uso de GeoGebra Classroom. El motivo fue mostrar a los futuros profesores un recurso para que puedan implementarlo en su práctica docente y a la vez, experimentar desde el rol del estudiante la resolución de las actividades. Los futuros profesores debían indagar y resolver las actividades del *applet*. A medida que iban avanzando se les mostró cómo puede observar el profesor el avance de sus alumnos. En la misma videoconferencia se buscó generar interacción entre los futuros profesores y darles la oportunidad de vivenciar lo que experimentaría un estudiante de educación secundaria al realizar la actividad. Cada estudiante mostró las dudas, inconvenientes y avances en las tareas, e intercambió aportes sobre el uso de las diferentes herramientas de GeoGebra. Finalmente se sugirió pensar mejoras para el *applet*. A la vez cada futuro profesor registró en un documento que debieron enviar a la plataforma virtual del curso para documentar la experimentación realizada con GeoGebra.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

Marco Teórico

La incorporación de los diferentes recursos digitales requiere dos aprendizajes; el uso del recurso y la forma de incorporación en la práctica. De acuerdo con Pepin et al. (2017) los diferentes usos que puede lograr un profesor al utilizar los recursos digitales en su clase, influyen en la forma de enseñar. Cuando un profesor hace uso de los recursos digitales hay factores claves que debe considerar entre los que se destacan: los objetivos de enseñanza, la metodología de uso, el rol del docente al intervenir y el rol de los estudiantes al resolver las actividades.

Para que un profesor incorpore la tecnología en el aula de matemática con un sentido didáctico no es suficiente el conocimiento tecnológico del recurso. Trouche (2004) se refiere a la "génesis instrumental" como un proceso de construcción progresiva en el uso de un recurso tecnológico. El conocimiento de un "artefacto" no es suficiente para concretar objetivos específicos en la enseñanza de la matemática, sino que es necesario que el profesor (o futuro profesor) aprenda el uso específico de estos recursos para poder incorporarlos en el proceso de enseñanza. Rabardel (1995) identificó dos procesos para lograr la "génesis instrumental": *instrumentalización* e *instrumentación*. En primer lugar, el profesor necesitará elegir un recurso, conocer su funcionamiento y cuáles son las actividades que puede realizar con el mismo, este primer proceso es el de *instrumentalización*. Para ello comenzará a imaginar una posible implementación del recurso. Luego pasará al proceso de *instrumentación* que se refiere a la manera en que es utilizado el recurso al implementarlo para la enseñanza de la matemática. La modalidad de implementación de los recursos se transforma por medio de los "esquemas de uso" que desarrolla el profesor al utilizarlos en su propia práctica y estos le ayudan a desarrollar la potencialidad que los recursos tecnológicos ofrecen para el aprendizaje.

La noción de *esquemas de uso* se origina a partir del concepto "esquema" propuesto por Vergnaud (1998). Frente a un conjunto de actividades con el mismo objetivo el profesor desarrolla y determina el esquema de uso que incluye: 1) el objetivo de la actividad; 2) las reglas de acción, de recuperación de información y de control; 3) invariantes operativas y 4) posibilidades de adaptación a las diferentes "situaciones". Esto quiere decir que un *esquema de uso de un recurso* se relaciona con la manera en que el profesor lo implementa en su práctica docente.

Para Parra y Guedet (2019) un recurso es “todo aquello que puede originarse de las prácticas de los profesores” (p. 6). El concepto que retoma Trouche et al. (2020) sobre los *recursos curriculares* se refiere a la propuesta de Pepin et al. (2017) quienes identificaron que “son todos los recursos desarrollados y usados por profesores y alumnos en su interacción con las matemáticas en y para la enseñanza y el aprendizaje, dentro y fuera del aula” (citado en Trouche et al., 2020, p. 4). Pepin et al. (2017) identifican que los *recursos digitales* también son recursos curriculares.

Hoja de trabajo

TABLA —— 1
Contenido temático de la clase, materiales y recursos utilizados.

<table>
<tr><th colspan="3">CURSO DIDÁCTICA II NIVEL: 3ER AÑO DE FORMACIÓN DOCENTE FECHA: MARZO DE 2021</th></tr>
<tr><td>Unidad 1:
Planificación de aula</td><td>Tema: Uso de recursos tecnológicos para enseñar matemática</td><td>Subtema:
paralelogramos</td></tr>
<tr><td>Hoja de trabajo 1:
Modalidad de enseñanza virtual, videoconferencia por Zoom. Se graba la sesión y se comparte con los estudiantes.
Metodología:
• Momento 1: trabajo individual
• Momento 2: trabajo colaborativo</td><td>Materiales:
• Cuestionario diagnóstico
• ficha de trabajo para el applet
• rúbrica de evaluación

Applet disponible en https://www.geogebra.org/m/bqrkyhqb GeoGebra classroom con el siguiente código https://www.geogebra.org/classroom/zxs6bpc2</td><td>Recursos:
• software de geometría dinámica GeoGebra
• GeoGebra Classroom
• internet
• computadora portátil</td></tr>
<tr><td>Tiempo de implementación:
2 horas reloj</td><td>Actividad domiciliaria:
completar y entregar en la plataforma virtual la ficha de trabajo que acompaña el applet.</td><td></td></tr>
</table>

Fases de la experiencia

La experiencia se desarrolló en diferentes fases mediante videoconferencia realizada por Zoom en la que los futuros profesores comparten avances y muestran lo que van realizando:

a. Inicio

- **i.** Presentación del applet, comprensión del enunciado y análisis del uso de las herramientas que se incluyen.
- **ii.** Creación de la clase virtual utilizando GeoGebra Classroom.

b. Desarrollo

- **i.** Exploración individual de cada estudiante.
- **ii.** Muestra de logros a partir de la presentación de las construcciones individuales.
- **iii.** Prueba de arrastre y análisis de conservación de las propiedades del paralelogramo o en su defecto fundamentación que provoca no conservarlas.
- **iv.** Socialización de los procedimientos realizados.
- **v.** Intercambio de ideas, procedimientos o inconvenientes.
- **vi.** Muestra de la visualización de GeoGebra Classroom desde el rol del profesor, identificación de los beneficios de su uso.
- **vii.** Trabajo colaborativo para superar obstáculos en la resolución de las actividades.

c. Tarea domiciliaria realizada en forma individual que registra las diferentes construcciones que surgieron durante la exploración del recurso.

¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

Materiales de trabajo

Actividad 1: Primera Parte

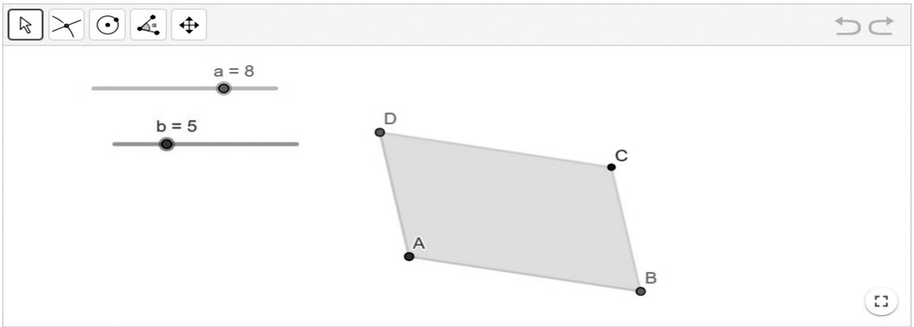
En el siguiente *applet* se ha construido un paralelogramo. Las longitudes de los lados están dadas a partir de dos parámetros “a” y “b”.

i. Elige tres valores del parámetro “a”, observa los paralelogramos obtenidos y analiza si tienen alguna similitud. Realiza captura de pantalla de los tres paralelogramos obtenidos, y pega dichas imágenes en un archivo Word con tu nombre. Escribe y muestra cuáles son las similitudes, ayudándote del *applet*.

ii. Repite el razonamiento anterior, pero al cambiar el valor del parámetro “b”.

iii. Plantea una conclusión.

FIGURA —— 1
El applet de la actividad 1, primera parte del *applet*



Luego de esta primera actividad se incluyó una pregunta que se observa en la siguiente imagen (Figura 2).

A la vez se anexó una ficha de trabajo en el propio *applet* para que los futuros profesores hagan el registro de lo trabajado (Anexo 1). Cabe considerar que GeoGebra permite generar un código QR además de un link de acceso a la misma (<https://www.geogebra.org/m/bqrkyhqb >) (ver Figura 3).

Seguidamente se complementa con una pregunta que promueve la argumentación (Figura 4).

FIGURA —— 2

Pregunta asociada a la parte 1 del *applet*

Variamos el valor del parámetro "a" y dejamos fijo el valor del parámetro "b"

¿Qué similitudes encontraste en los tres paralelogramos al variar el valor del parámetro "a"?

Marca todas las que correspondan

- [ ] Los paralelogramos conservaron la amplitud de sus ángulos.
- [ ] Las longitudes de sus lados no cambiaron.
- [ ] Las amplitudes de los ángulos cambiaron.

FIGURA —— 3

Ficha anexa en el *applet* y código QR que se puede generar

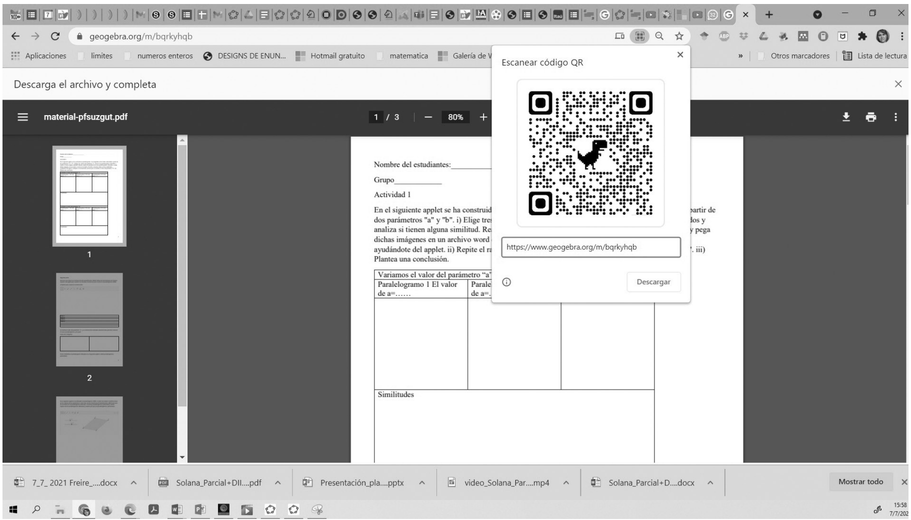


FIGURA —— 4

Luego de analizar 3 posiciones de cada parámetro. Sube en la plataforma del curso, las imágenes con tu nombre y conclusión. ¿Cuál ha sido tú conclusión? ¿Por qué?

En una segunda parte es el estudiante quien tiene que realizar la construcción de un paralelogramo al utilizar las herramientas que se incluyeron en el *applet*.

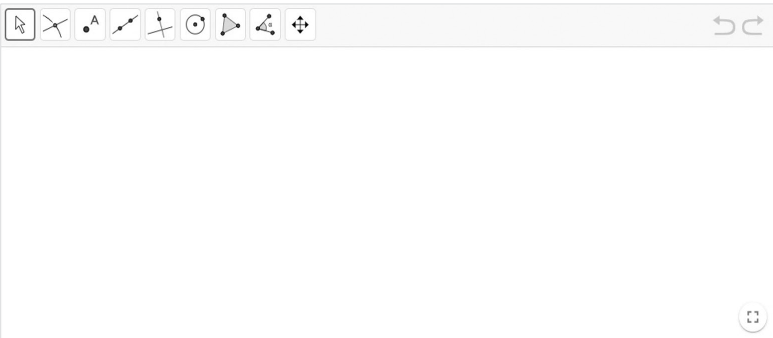
Segunda Parte

Para esta segunda parte se personalizó la barra de herramientas, esto quiere decir que se restringió el acceso a determinados comandos con la intención de no confundir a los estudiantes con demasiadas opciones de búsqueda. Por ejemplo, se puso la opción de circunferencia conocido el centro y un punto de ella y circunferencia conocido un punto y el radio. En el *applet* se adjuntó un archivo con algunas instrucciones, como por ejemplo realizar captura de pantalla para tres valores del parámetro, especificar los pasos de construcción de la figura de la parte 2, copiar una imagen de la figura obtenida y algunas preguntas con retroalimentación V o F.

En específico el enunciado de la actividad incluida en el *applet* es el que figura en la siguiente imagen (ver Figura 5).

Enunciado
Ahora te toca hacer la construcción de un paralelogramo ABCD
Utiliza las herramientas de la barra superior del applet para realizar los trazados necesarios para construir un paralelogramo ABCD.
Mueve uno de los vértices. ¿El cuadrilátero obtenido continúa siendo un paralelogramo? ¿Por qué?

FIGURA —— 5
Enunciado de la construcción del paralelogramo. En la parte superior del rectángulo se muestra la barra de herramientas personalizada



Para reflexionar, si la figura construida conserva el arrastre se incluyó una pregunta de respuesta corta que cuestiona al estudiante si su figura conserva el arrastre y por qué lo hace o no.

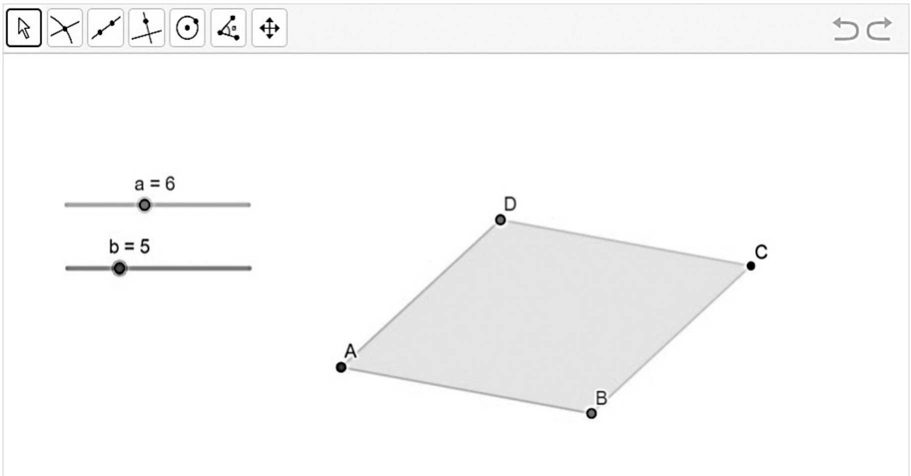
Tercera Parte del Applet

En la tercera parte del *applet* se le pide al estudiante transformar el paralelogramo que se ha dibujado en paralelogramos particulares (ver Figura 6). De esta forma el estudiante tendrá en primera instancia que identificar cuáles son estos paralelogramos particulares (cuadrado, rombo, rectángulo) y luego tendrá que construirlos.

Parte 3)
En el siguiente *applet* se ha dibujado un paralelogramo ABCD.

- A partir de realizar modificaciones en los valores de los parámetros y algo más, transforma el paralelogramo ABCD para que se convierta en un paralelogramo particular.
- Construir paralelogramos particulares, realiza captura de ellos y explica por qué son paralelogramos particulares.

FIGURA —— 6
Applet de la parte 3



Rúbrica de Evaluación

Para la evaluación de la tarea domiciliaria, que consistió en registrar las soluciones de cada uno de los futuros profesores, se diseñó una rúbrica a efectos de identificar los logros alcanzados por los estudiantes y realizar retroalimentación sobre las actividades resueltas (Tabla 2).

TABLA —— 2
Rúbrica de Evaluación de la actividad 1

CALIFICACIÓN TOTAL: 12 PUNTOS	NIVEL I: 1 PUNTO	NIVEL II: 2 PUNTOS	NIVEL III: 3 PUNTOS
PARTE 1			
Realiza captura de pantalla de las construcciones obtenidas para tres valores del parámetro “a”, observa los nuevos cuadriláteros obtenidos y plantea alguna conjetura.	El estudiante no presenta todas las construcciones solicitadas y no conjetura.	El estudiante pone tres valores del parámetro, incluye las imágenes, pero se le dificulta realizar una conjetura que vincula los paralelogramos obtenidos.	El alumno identifica que al variar un solo parámetro se obtienen paralelogramos con las mismas amplitudes de los ángulos.
PARTE 2			
Utiliza las herramientas de la barra superior del applet para realizar los trazados necesarios para construir un paralelogramo ABCD. Mueve uno de los vértices. ¿El cuadrilátero obtenido continúa siendo un paralelogramo? ¿Por qué?	Se presentan alguna de las siguientes situaciones: • El estudiante no logra realizar la construcción según las herramientas solicitadas en el enunciado. • La figura obtenida no es un paralelogramo.	El estudiante realiza la construcción en forma correcta solo para el caso particular que construye.	El estudiante realiza la construcción en forma correcta. ó El estudiante realizó una construcción que no conserva el arrastre, se da cuenta de no haber utilizado las propiedades del paralelogramo en forma genérica. Corrige la construcción y contesta correctamente.

PARTE 3			
Construye paralelogramos particulares a partir del paralelogramo dibujado.	Presenta una sola construcción que podrá ser un paralelogramo, cuadrado o rombo.	Se presentan dos construcciones entre parlelogramo, cuadrado y rombo.	Se presenta la imagen de un paralelogramo, un cuadrado y un rombo.

¿QUÉ RESULTADOS SE OBTUVIERON?

Registro de las respuestas de los futuros profesores

Se presenta parte de la implementación del recurso propuesto para experimentar con paralelogramos. La intencionalidad de la profesora formadora fue que los futuros profesores vivencien desde el lugar de estudiantes de educación secundaria cómo resuelven una actividad presentada por medio de un *applet* creado con GeoGebra. Luego, en una segunda etapa, los futuros profesores deberán hacer modificaciones y elaborar ellos una tarea, generar un *applet* y diseñar una planificación de cómo lo implementarían en el aula. A lo largo de la clase se solicitó que identifiquen posibles beneficios y dificultades que podría experimentar un estudiante de educación secundaria al utilizar este recurso.

La actividad se realizó durante 80 minutos. Se compartió el enlace de GeoGebra Classroom a través del chat de la videoconferencia de Zoom para entrar a la secuencia de actividades incluidas en el *applet*. En la actividad cada futuro profesor trabajó compartiendo pantalla para mostrar su trabajo.

Actividad 1: Parte 1

En esta primera parte, a partir de cambiar los valores del parámetro, los futuros profesores observaron diferentes paralelogramos con características similares. En la descripción se utilizará para nombrar a cada uno de los futuros profesores: FP1, FP2, FP3, FP4.

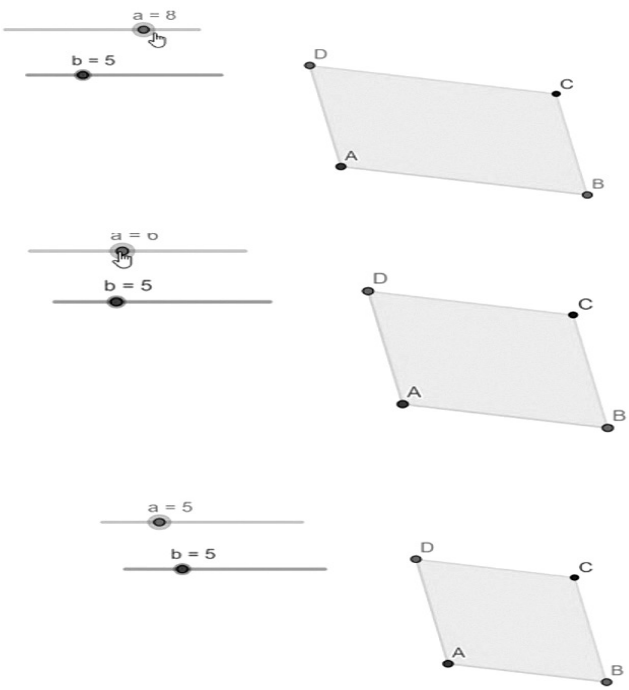
Respuesta del FP1. (ver Figura 7):

"Seleccioné los siguientes valores para el parámetro "a": 8, 6 y 5. Observo que al variar "a", el lado BC se traslada manteniendo su medida, en el caso particular de a=b=5, observo que se asemeja bastante a un rombo.

(Lo cual no es cierto y habrá que conversarlo en la clase). Los parámetros supongo que son las medidas de los segmentos, el parámetro “a” corresponde a la medida del lado AB y el parámetro” b” corresponde a la medida del lado AD.

Los ángulos del paralelogramo se mantienen inalterados” (FP1).

FIGURA —— 7
Captura de pantalla de las 3 figuras obtenidas al variar el parámetro “a”



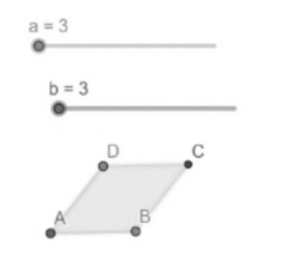
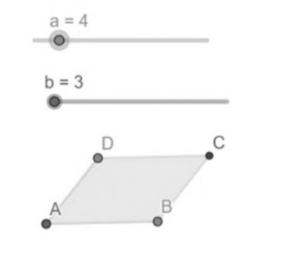
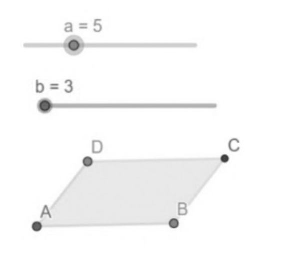
La respuesta brindada por el estudiante permite identificar algunos conceptos o concepciones que será necesario ajustar, por ejemplo, la noción de rombo. Si bien la reflexión indica haber visto ciertas similitudes entre los paralelogramos no especifica haber identificado la congruencia de las amplitudes de los ángulos de todos los paralelogramos. Sin embargo, la posibilidad dinámica del software le permitió observar en un mismo momento la figura para diferentes valores del parámetro “a”. En forma similar trabaja al variar el parámetro “b”.

Respuesta del FP2

En un primer caso la variación del parámetro "a" (medida de los AB, CD) no provoca cambios en la dirección de los segmentos AB, CD. El parámetro "b" (medida de los lados AD, BC) no varía (ver Figura 8).

FIGURA —— 8

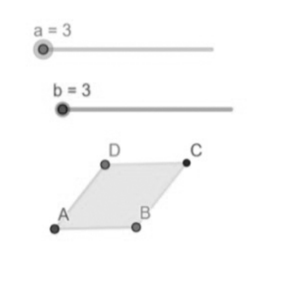
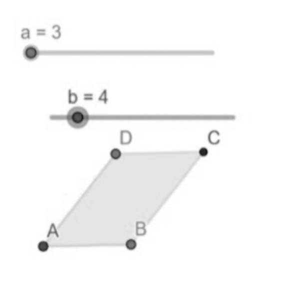
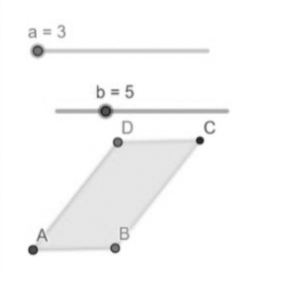
Captura de pantalla obtenida por el FP2

Variamos el valor del parámetro "a"		
Paralelogramo 1 El valor de a=3	Paralelogramo 2 El valor de a=4	Paralelogramo 3 El valor de a=5
		

La variación del parámetro "b" (medida de los lados AD y BC) no provoca cambios en la dirección de los segmentos AD, BC. El parámetro "b" (medida de los lados AB, CD) no varía (ver Figura 9).

FIGURA —— 9

Captura de pantalla obtenida al variar el deslizador "b"

Variamos el valor del parámetro "b"		
Paralelogramo 1 El valor de b=3	Paralelogramo 2 El valor de b=4	Paralelogramo 3 El valor de b=5
		

Observación

En la respuesta anterior el futuro profesor (FP2) utiliza las palabras “dirección de los segmentos” para referirse al ángulo que se forma entre ellos. En específico utiliza la palabra “dirección” asociada a la noción de “inclinación”.

Parte 2

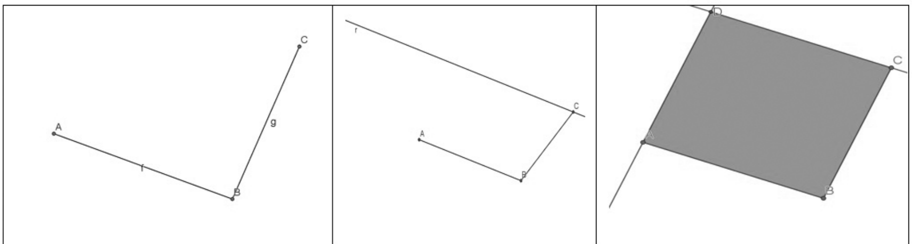
En esta segunda parte se pide construir un paralelogramo. A continuación, se muestran algunas de las respuestas que se presentaron que incluyen diferentes razonamientos para realizar la construcción. Cabe considerar que en la parte 2 los futuros profesores debían hacer uso de las herramientas (comandos) que presenta el *applet*. En esta etapa se observó el proceso de instrumentalización en el que aprendieron a utilizar el recurso digital, ya que correspondió a una etapa de exploración sobre la funcionalidad de las herramientas del *applet*.

Resolución 1 aportada por el fp2

Este estudiante primero identificó el uso de las herramientas circunferencia, centro y punto de ella, sin embargo, se vio impedido de seguir avanzando. Otro compañero FP3 le dio una sugerencia para continuar, la de usar rectas paralelas. FP2, luego de realizar la construcción identificó que, aunque mueva uno de los vértices el paralelismo, sigue manteniéndose y el cuadrilátero determinado siempre es un paralelogramo. A continuación, se detallan los pasos seguidos en la construcción del paralelogramo (ver Figura 10).

FIGURA —— 10

Procedimiento de construcción del paralelogramo



Paso 1	Paso 2	Paso 3

El estudiante FP2 escribió los pasos que realizó para la construcción:

Paso 1: trazo en sentido antihorario los vértices A, B, C y los segmentos AB, BC.

Paso 2: trazo la recta *r* paralela a AB por C, trazo recta s paralela a BC por A.

Paso 3: el vértice D es la intersección de las rectas *r* y *s*.

Paso 4: trazo los segmentos AD, CD.

Esta actividad también fue resuelta por otro procedimiento, a continuación, se muestra la resolución realizada por la estudiante FP4.

Resolución 2 realizada por la fp4

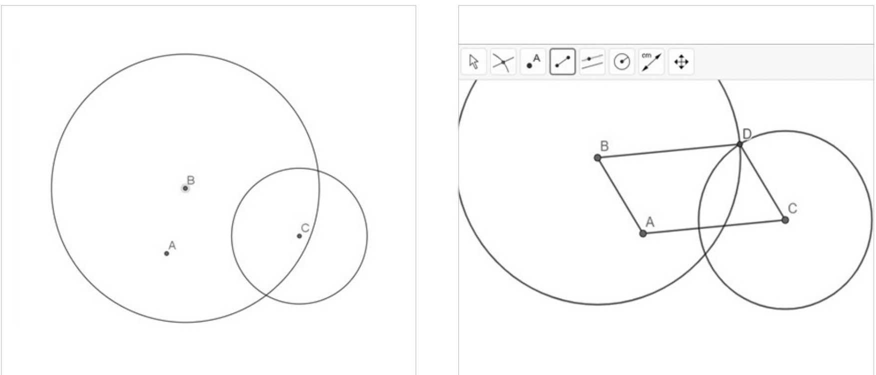
Paso 1: elijo 3 puntos A, B, C no alineados.

Paso 2: trazo los segmentos AC y BA.

Paso 3: trazo una circunferencia C con la herramienta "circunferencia: centro y radio" de centro B y radio = AC (es decir completo con "AC" cuando nos permite introducir la medida del radio).

Paso 4: idem con una circunferencia C' de centro C radio BA.

FIGURA — 11
Construcción del paralelogramo Paso 1 y Paso 6



Paso 5: utilizo la herramienta intersección para determinar el punto D en la intersección de las circunferencias en el semiplano de borde AC que contiene a B.

Paso 6: trazo los segmentos CD y DB. Obtengo el paralelogramo ACDB.

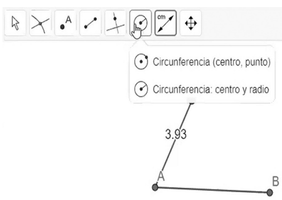
Respuesta del estudiante FP3

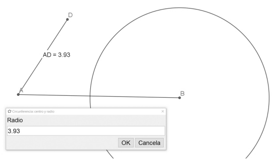
El estudiante FP3 utilizó la opción circunferencia, centro y radio. Realizó bien la construcción, pero cuando tuvo que mover la posición de uno de los vértices de su cuadrilátero, que originalmente era un paralelogramo, este dejó de serlo. De ahí la pregunta: ¿el cuadrilátero siguió siendo un paralelogramo al mover uno de los vértices? ¿Por qué? Esta pregunta le hizo reflexionar nuevamente en su construcción y darse cuenta que para que el polígono continúe siendo un paralelogramo debería haber utilizado la opción de circunferencia conocido su centro y radio con base a los extremos de cada segmento y no referido a una longitud en particular.

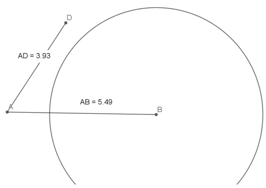
A continuación, se muestra el proceso que se dio y los diálogos de los estudiantes (Tabla 3).

TABLA —— 3

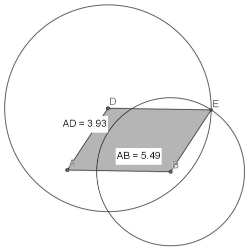
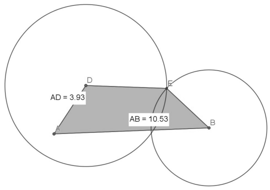
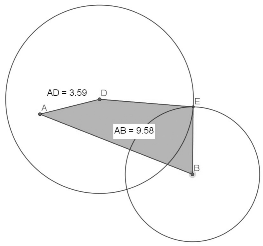
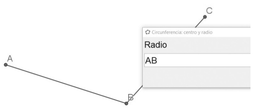
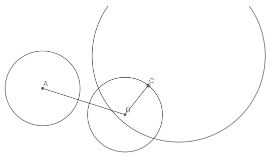
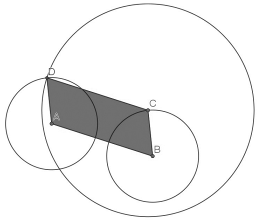
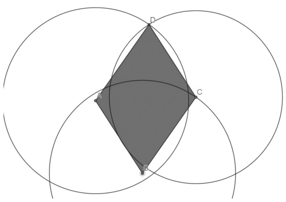
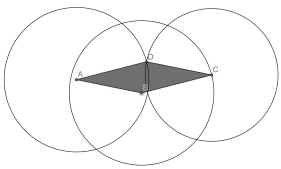
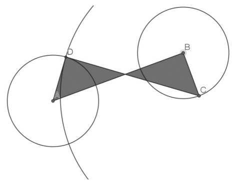
Procedimiento de construcción, análisis del arrastre y validación usando GeoGebra

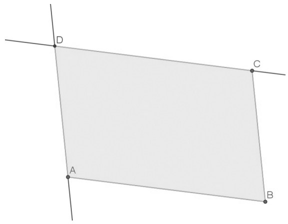
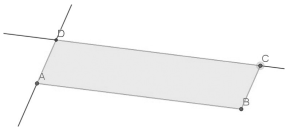
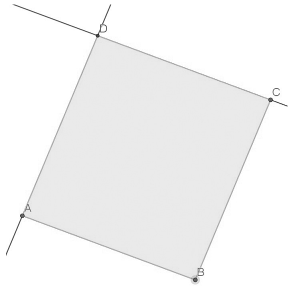






FP3 ¿puedo compartir pantalla?	FP3 Hago una circunferencia de centro B y radio 3,93 PF ahora vamos a tener un problema, vos termínalo.	E3: tengo que volver a medir PF Cuando termines te pide que muevas uno de los vértices

		
FP3: ¡mirá que lindo lo que pasa!	PF: esto está buenísimo, pensemos. ¿Por qué pasa esto? FP3: claro mirá lo que te pasa (continúa mostrando como se le deformó la figura)	FP3: ¿según como elijas los puntos no alineados?, ¿será que si lo hacés con intersección de circunferencias te da cualquier cosa?
		
FP1: Les muestro lo que yo hice PF ¿dependerá como elijas el razonamiento?	PF ¿entonces al principio estaba bien? ¿qué pasó? FP2 si, al principio estaba bien	FP1: Yo lo hice usando circunferencia de centro C y radio AB y circunferencia de centro A y radio BC.
		
FP1: Aunque cambie la posición de A, B o C sigue siendo un paralelogramo	FP1: Aquí cambié la posición de B	FP1:Pero aquí no es un paralelogramo FP: ¿Por qué?

		
FP4: lo hice usando rectas paralelas	FP4: siempre que varío la posición de los vértices continúa siendo un paralelogramo.	FP4: Se conserva el paralelismo de lados opuestos.

Durante el desarrollo de la clase se generó un proceso meta-reflexivo que promovió la argumentación y provocó volver sobre los propios pensamientos para identificar qué estaba ocurriendo al no conservarse el arrastre. Evidencia de este proceso se muestra en el razonamiento del FP2 y la FP4:

> Lo vuelvo a hacerlo de 0 partiendo de la base, [...] en geometría [...] No hay una sola manera de hacer las construcciones. Lo que hice fue marcar tres vértices, dos segmentos y luego usar la opción circunferencia (FP2).

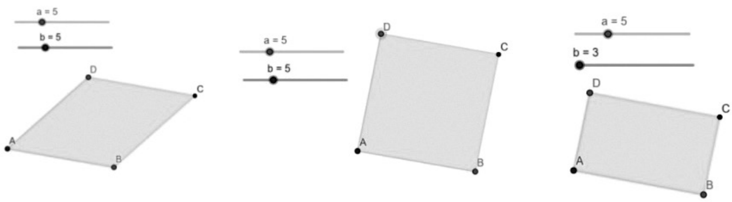
> Los radios de las circunferencias *C* y *C'* trazadas para determinar al punto B dependen de las medidas de los segmentos BA y AC, por lo tanto al mover un vértice A, B o C, siempre y cuando no lo mueva al semiplano opuesto respecto de la recta determinada por los otros dos puntos dados, seguirá siendo un paralelogramo. Si hubiese utilizado la herramienta longitud y hubiese trazado circunferencias con una longitud dada y no dependiendo de los segmentos BA y AC al mover un vértice la figura dejaría de ser un paralelogramo. (FP4).

Parte 3

En esta parte deben construir paralelogramos particulares a partir de un paralelogramo general. La siguiente fue la resolución de FP1 (ver Figura 12): Igualé los dos parámetros, y obtuve un rombo (paralelogramo con sus 4 lados iguales).

FIGURA —— 12

Captura de pantalla del rombo, cuadrado y rectángulo obtenidos por la FP4

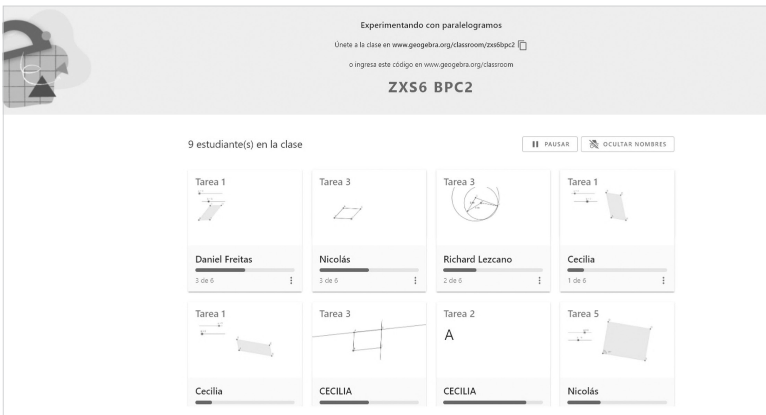


En esta parte se buscó que el estudiante vincule los paralelogramos que se generan con la clasificación de cuadriláteros con lados opuestos paralelos.

La implementación del *applet* al usarlo en GeoGebra Classroom también sirvió para que los futuros profesores pudieran ver cómo visualiza el profesor el avance de los estudiantes de su clase y cómo el profesor puede ingresar al trabajo realizado por cada estudiante (ver Figura 13).

FIGURA —— 13

Captura de pantalla, clase creada en GeoGebra Classroom por el profesor formador



Logros de la experimentación

Durante la resolución del *applet* se identificaron tres momentos vivenciados por los futuros profesores: 1) análisis y prueba de las herramientas del recurso, en específico del *applet*; 2) uso de las herramientas del *applet* y análisis de posibles conflictos que podrían surgir al implementarlo en la práctica docente; 3) intercambio de ideas entre los futuros profesores y con el profesor formador.

Los futuros profesores tuvieron una experiencia pedagógica con el uso de GeoGebra Classroom vivenciando cómo lo haría un estudiante y a la vez cómo lo vería un profesor. Al experimentar el rol del estudiante pudieron darse cuenta de las posibles preguntas y dificultades a las que sus estudiantes encontrarían al utilizar un recurso tecnológico.

En relación al uso de las herramientas de GeoGebra se observaron dificultades que surgieron en el proceso de resolución de la actividad del *applet*. Debido a la poca experiencia en el manejo de GeoGebra fue necesario desarrollar la cooperación y colaboración entre los futuros profesores, lo cual permitió que todos los futuros profesores pudieran completar la actividad utilizando diferentes métodos de resolución. Este proceso de aprendizaje en el uso del recurso favoreció la instrumentalización, en forma simultánea se desarrolló el proceso de instrumentación de manera colectiva ya que surgieron sugerencias de implementación del recurso en el aula. Por un lado, fortalecieron y aprendieron el uso técnico de las herramientas de GeoGebra y por otro lado, enriquecieron su mirada sobre lo que ocurriría en un aula de educación secundaria al implementar el recurso. Identificamos que la resolución de la actividad no solo permitió reforzar conocimientos matemáticos, sino que también fortaleció aspectos conceptuales, por ejemplo, referidos a la definición de paralelogramo o rombo, como también a sus propiedades.

También surgió la discusión del análisis de las causas que provocaron que en la construcción de uno de los futuros profesores no se conservara el arrastre. Esta construcción generó un debate que permitió identificar la necesidad de no incluir medidas particulares de segmentos al construir circunferencias, sino que debían incorporar el radio en función de las letras asignadas a los extremos de un segmento. Respecto al uso de las propiedades para la construcción del paralelogramo, se observa que el arrastre se convirtió en un instrumento de validación, ya que permitió verificar que el diseño considera las propiedades de los paralelogramos en forma genérica.

Otro motivo que es necesario destacar es que el aprendizaje de GeoGebra Classroom se compartió con los profesores adscriptores (titulares de los grupos en que los futuros profesores implementan su práctica). Este hecho es importante ya que algunos de los profesores adscriptores no tienen conocimientos actualizados sobre el uso de recursos digitales para la enseñanza de la matemática.

Propuestas de mejora del *applet*

Los futuros profesores propusieron recomendaciones para mejorar el diseño del *applet*. Se sugirió agregar un link para adjuntar las respuestas de la actividad, por lo cual se creó un espacio virtual para que los estudiantes suban sus respuestas. La profesora formadora propuso añadir una tarea en la plataforma virtual Schoology para subir el registro de la resolución realizada por cada futuro profesor como se muestra en la Figura 14. Asimismo, se creó una carpeta compartida en la que los estudiantes pudieron subir el archivo y ver los procesos de resolución de sus compañeros.

Otra de las recomendaciones fue restringir las opciones de la barra de herramientas del *applet* en la parte 2 y a la vez agregar la herramienta "polígono". A continuación, en la Figura 15, se muestra la barra de herramientas de la actividad 2 que incluye el ícono polígono.

FIGURA —— 14

Captura de pantalla de la tarea creada en la plataforma Schoology para subir las respuestas del applet

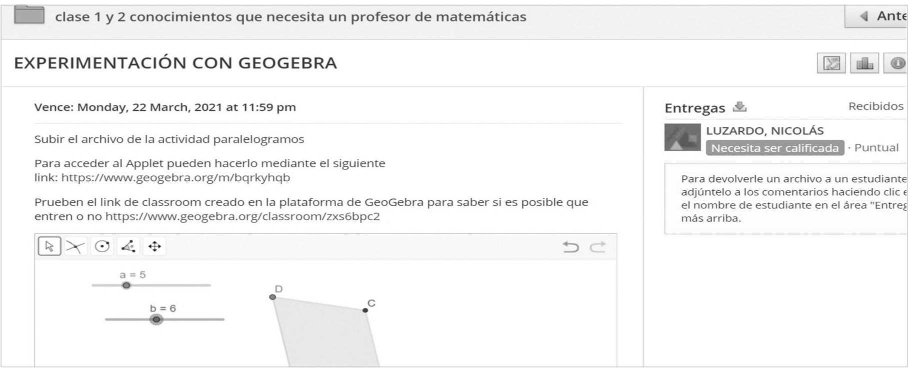
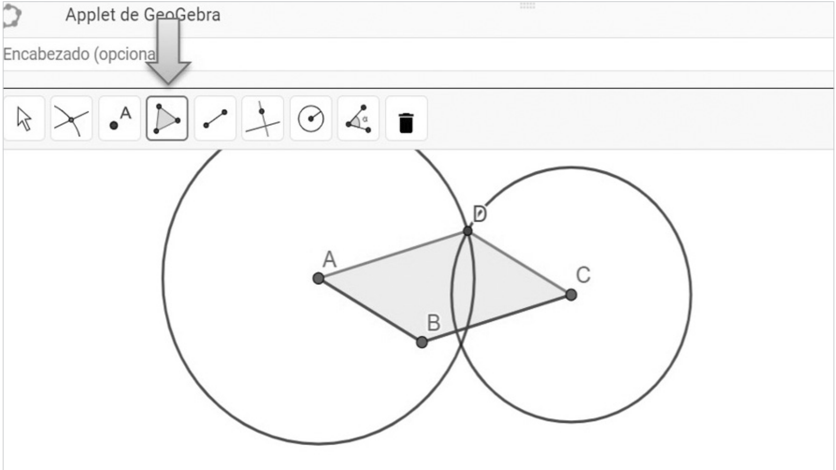
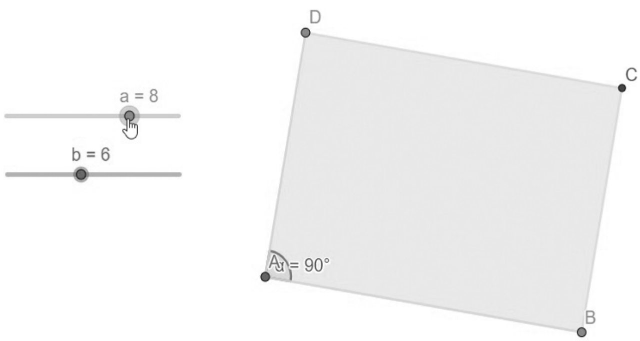


FIGURA —— 15
Captura de pantalla de la parte 2, con el nuevo ícono de "polígono"



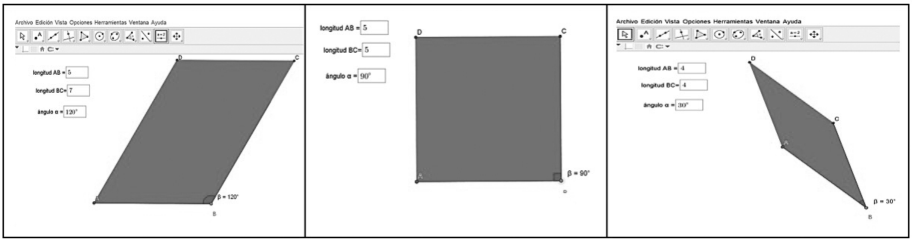
Para la parte 3, se sugirió incorporar el ángulo entre dos segmentos consecutivos ya que al no tenerlo se originó la dificultad de no poder realizar con precisión la construcción de un rectángulo y de un cuadrado, cuestión manifestada por una estudiante (FP4). En la Figura 16 se muestra cómo quedaría la construcción de un rectángulo mostrando el ángulo de 90°.

FIGURA —— 16
Captura de pantalla de un rectángulo



Se pensó en otra posible alternativa que fue la de confeccionar un nuevo *applet* que incluyera "casillas de entrada". La ventaja de incluir una casilla de entrada con las longitudes de dos segmentos consecutivos del paralelogramo y otra con la amplitud del ángulo comprendido entre ellos (ver Figura 17) fue la de construir con precisión un cuadrado o un rectángulo. De esta forma se ofrecieron otras posibilidades para facilitar la construcción solicitada. El *applet* modificado tiene el siguiente enlace de acceso: https://www.geogebra.org/material/edit/id/hznftbuc

FIGURA —— 17
Parte 3 con las casillas de entrada. A la izquierda se construyó un paralelogramo, en el centro se construyó un cuadrado y a la derecha un rombo



Proyecciones a futuro

Esta experiencia de aula deja abierta la posibilidad de hacer nuevas implementaciones y continuar profundizando en la investigación vinculada a futuros profesores en el uso de tecnología para enseñar matemática. De esta forma, se podrá determinar cuáles son los procesos de instrumentalización e instrumentación de manera colaborativa. A la vez, se podrá analizar cómo el docente formador orquesta el proceso de enseñanza al introducir un nuevo recurso como el GeoGebra Classroom. También, se sugiere continuar con el análisis de una clase en la cual el futuro profesor adapta los recursos digitales a su práctica docente, considerando el contexto de la institución educativa en la que enseña.

Nos proyectamos en futuras instancias continuar con la profundización en el aprendizaje de recursos tecnológicos para enseñar matemática. Se buscará promover no solo el uso del software GeoGebra, sino también la implementación de diferentes dispositivos tecnológicos, por ejemplo, el celular, así si los estudiantes no disponen de computadoras pueden utilizarlo en sus casas o en el aula. Por otra parte, se tiene previsto utilizar versiones *on line* como también versiones portables del software GeoGebra. Otro aspecto que se buscará desarrollar es la articulación entre diferentes registros de representación ya sea el gráfico, verbal, tabular y representaciones en 3D.

En particular, luego de esta primera experiencia se promovió que los futuros profesores diseñaran para su práctica docente *applet* en diferentes temas. Entre los que se destacan: 1) introducción a la noción de límite en un punto; 2) análisis de los límites laterales en x=a cuando la función está definida a partir de una función a trozos y presenta una discontinuidad con salto finito cuando "x tiende hacia *a*"; 3) análisis de la variación del coeficiente angular de dos rectas; 4) deducción de la descomposición factorial de un polinomio de grado 3; 5) resolución de sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

REFERENCIAS

ARTIGUE, M. (2015). Tecnologías de la información y de la comunicación y aprendizaje basado en la investigación: ¿qué sinergias? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Eds.). *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 17-27).

ARTIGUE, M. (2016). Didáctica de las matemáticas y las matemáticas: relaciones tanto cruciales como problemáticas, culturalmente situadas. En L. Theis (Ed.), *Pluralidades culturales y universalidad de las matemáticas: desafíos y perspectivas para su enseñanza y aprendizaje.* Actas del Coloquio EMF 2015 (pp. 73-80).

BORBA, M. C. y Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation* (Vol. 39). Springer Science & Business Media.

CARRILLO, A. (2019). *Materiales y recursos para aprovechar lo que ofrece la comunidad GeoGebra*. Universidad de Córdoba. Recuperado de: http://

repositorio.unae.edu.ec/bitstream/56000/1220/1/Agusti%CC%81n%20 Carrillo.pdf

DRIJVERS, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., y Maschietto, M. (2016). Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education. In *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education* (pp. 1-34). Springer, Cham.

DUVAL, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

FARFÁN, S. (2015). *Formación de docentes en el uso de las tecnologías de información y comunicación para la mejora del proceso enseñanza aprendizaje en Bolivia*. [Tesis de Doctorado no publicada]. Universidad Nacional de Educación a Distancia, España. Recuperado de: http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:EducacionSfarfan/FARFAN_SOSSA_Sulma_Tesis.pdf

HERNÁNDEZ, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill Education.

HODGES, C., Moore, S., Lockee, B., Trust, T. y Bond, A. (2020). The difference between emergency remote teaching and online learning. *Educause review*, *27*(1), 1-9.

PEPIN, B., Choppin, J., Ruthven, K. y Sinclair, N. (2017). *Digital curriculum resources in mathematics education: foundations for change*. ZDM, *49*(5), 645-661.

PONTE, J. (2006). *Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 19*(25), 105-132. Recuperado de http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/1880/1657

SANDOVAL, I. y Moreno, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1). *Revista de la Unidad de Educación de la Facultad de Ciencias Humanas y Sociales*. Recuperado de: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4777923

SHIEH, C. J. y Yu, L. (2016). A study on information technology integrated guided discovery instruction towards students' learning achievement and learning retention. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *12*(4), 833-842.

TROUCHE, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions incomputerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *9*(3), 281-307.

TROUCHE, L., Gueudet, G., Pepin, B.,Salinas-Hernández, U. y Sacristán, A. (2020). El enfoque documental de lo didáctico. DAD-Multilingual, 2020. Hal-02557744v2

VINNER, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81).

ANEXOS

ANEXO — 1
Ficha de registro de las respuestas para los estudiantes

Nombre del estudiante:____
Grupo____

*Accede a la siguiente actividad en: https://www.geogebra.org/m/bqrkyhqb**

Actividad 1

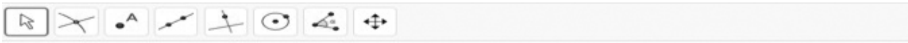
En el siguiente *applet* se ha construido un paralelogramo. Las longitudes de los lados están dadas a partir de dos parámetros "a" y "b". i) Elige tres valores del parámetro "a", observa los paralelogramos obtenidos y analiza si tienen alguna similitud. Realiza captura de pantalla de los tres paralelogramos obtenidos, y pega dichas imágenes en un archivo Word con tu nombre. Escribe y muestra cuáles son las similitudes, ayudándote del *applet*. ii) Repite el razonamiento anterior, pero al cambiar el valor del parámetro "b". iii) Plantea una conclusión.

Variamos el valor del parámetro "a"		
Paralelogramo 1 El valor de a=	Paralelogramo 2 El valor de a=	Paralelogramo 3 El valor de a=
Similitudes:		
Variamos el valor del parámetro "b"		
Paralelogramo 1 El valor de b=	Paralelogramo 2 El valor de b=	Paralelogramo 3 El valor de b=
Similitudes:		

Segunda Parte

Ahora te toca hacer la construcción del paralelogramo ABCD Utiliza las herramientas de la barra superior del *applet* para realizar los trazados necesarios para construir el paralelogramo ABCD.

i. Explica paso a paso la construcción



Paso 1
Paso 2
Paso 3
Paso 4

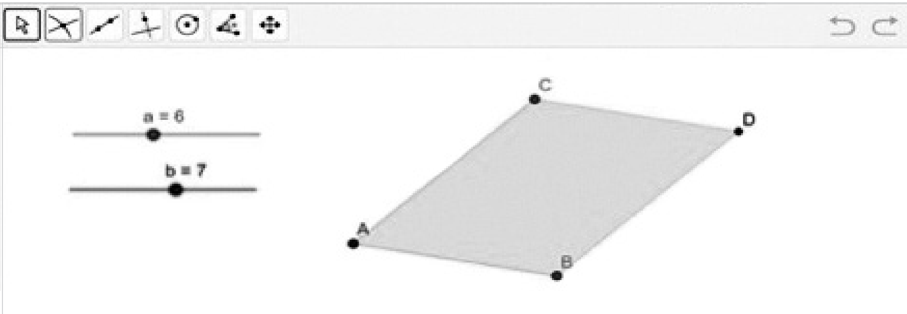
ii. iCambia el valor del parámetro "a". ¿La construcción realizada anteriormente permitió construir el nuevo paralelogramo? ¿Por qué?

Copia dos imágenes

Parte 3

Modifica el paralelogramo dibujado en el siguiente applet y obtén paralelogramos particulares.

En el siguiente *applet* se ha dibujado un paralelogramo ABCD. A partir de realizar modificaciones en los valores de los parámetros y algo más, tal vez transforma el paralelogramo ABCD para que se convierta en un paralelogramo particular. Construye paralelogramos particulares, realiza captura de los paralelogramos obtenidos y explica por qué son paralelogramos particulares.



EXPERIENCIA 2

Estimación del área del lago en forma de corazón. Una experiencia mediada por GeoGebra

YASMÍN JOHANNA GARCÍA

RESUMEN

El presente documento tiene como objetivo desarrollar la implementación de las hojas de trabajo diseñadas en el marco del curso Cálculo de una variable de la Universidad Icesi. En estas hojas se pretendía potencializar las competencias de comunicación y modelación a través de un problema en un contexto real, el cual fue el cálculo del área del lago, que tiene forma de cardiode, ubicado en la Universidad Icesi. El fin último de la secuencia es desarrollar en los estudiantes capacidades de resolución de problemas y comunicación. Los roles del docente y estudiantes cambian en este modelo, puesto que son activos y adquieren nuevas capacidades. El aporte de la tecnología cobra vital importancia como mediador y optimizador del proceso, llegando a la conclusión que es una secuencia que tiene mucho que aportar al desarrollo mismo del curso, al eje temático a los objetivos del programa y a las capacidades, habilidades y competencias ciudadanas y laborales.

DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO?

La Icesi es una prestigiosa Universidad del sector privado ubicada en Santiago de Cali con más 40 años de fundación, acreditada por su Alta Calidad por el Consejo Nacional de Acreditación de Colombia. Actualmente cuenta con 6.057 estudiantes de pregrado y 1.196 estudiantes de posgrados, 264 profesores de planta, de los cuales el 60% son PhD. o tienen su doctorado en curso. Cuenta con 29 programas en pregrado, 1 doctorado, 25 maestrías, 18 especializaciones médico-quirúrgicas y 18 en otras especialidades 27 centros académicos y 14 grupos de investigación, cuya dinámica de publicaciones en revistas indexadas, le ha permitido ser incluida en el Ranking Internacional de Scimago.11.955 egresados de pregrado 10.609 egresados de posgrados.

Sujetos

La Universidad Icesi cuenta actualmente con un total de 6057 estudiantes activos, en un total de 29 programas de pregrados, de estos el 67,9% provienen del área metropolitana de la ciudad de Cali, el 11% de otras Ciudades del Valle del Cauca y el 21,1% de otras ciudades de Colombia o el exterior[1]. Del total de estudiantes, el 53,6% son mujeres mientras que el 46,4% son hombres. La distribución de matrícula por estratos socioeconómicos y por facultad esta así:

TABLA —— 1
Distribución de estudiantes por estrato socioeconómico

ESTRATO	% DE ESTUDIANTES
1	13,9
2	27,6
3	18,3
4	12,6
5	17,5
6	9,7

Fuente: Boletín Icesi

1. Promedio de Matriculados nuevos por ciudad de procedencia, segundos períodos de los últimos años.

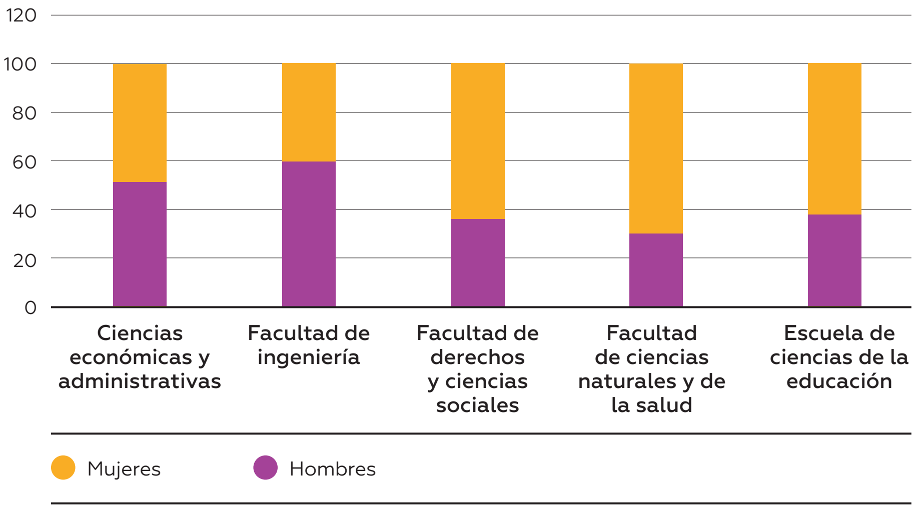
TABLA —— 2
Distribución de estudiantes por Facultades y escuelas

ESTRATO	% DE ESTUDIANTES
Facultad de ciencias administrativas y económicas	972
Facultad de ingeniería	1566
Facultad de derechos y ciencias sociales	1138
facultad de ciencias naturales	632
Facultad de ciencias de la salud	705
Escuela de ciencias de la educación	132

Fuente: Boletín Icesi

En la matrícula distribuida por Facultades y Escuelas, el 12% representan a los estudiantes de ciencias Naturales de los cuales 10 % están cursando el curso de Cálculo de una variable, curso donde se hizo la intervención:

FIGURA —— 1
Porcentaje de la población distribuida por género



Podemos observar que, en la facultad de ciencias naturales, el 31% son hombres y el 69% son mujeres aproximadamente **Sujetos en el Curso de Cálculo Una Variable.** El curso de Cálculo de una Variable está dirigido para estudiantes de Ingeniería Bioquímica y química farmacéutica, se llevó a cabo en los grupos 01 y 03 con un promedio de 32 estudiantes por salón. El 42,4% son hombres y el 57,6% son mujeres. El equipo de docentes estaba conformado por dos docentes; un doctor en educación y un magíster en educación, además se tenía un asesor en lenguaje magíster en educación.

MODELO PEDAGÓGICO: APRENDIZAJE ACTIVO

La Universidad Icesi ha desarrollado un Modelo pedagógico de aprendizaje activo, basado en el desarrollo de competencias. El aprendizaje activo es definido en el Proyecto educativo Institucional (PEI) de la siguiente manera:

Para que exista aprendizaje activo los estudiantes deben hacer mucho más que oír; deben leer, cuestionarse, escribir, discutir, aplicar conceptos, utilizar reglas y principios, resolver problemas. El aprendizaje activo implica que el estudiante debe estar expuesto continuamente, bien sea por voluntad propia o porque la estrategia utilizada por el profesor así lo exige, a situaciones que le demanden operaciones intelectuales de orden superior; análisis, síntesis, interpretación, inferencia y evaluación"[2]Como se puede observar, el modelo pedagógico transforma la pasividad que caracteriza el aprendizaje en los modelos tradicionales, en dinamismo. En este sentido, el estudiante debe asumir un rol activo, para lo cual la comunicación de su pensamiento juega un papel preponderante en la construcción de conocimiento, socialización y argumentación de ideas. En esta misma dirección, el modelo impulsa el desarrollo de cuatro tipos de capacidades: la comunicativa, trabajo personal efectivo con otros, vivir en sociedad y la capacidad intelectual. Naturalmente, todas las unidades académicas de la Universidad deben propender al desarrollo de estas capacidades.

---

2. Universidad Icesi. (2017). *Proyecto educativo Institucional*. Cali, Valle: Icesi.

¿QUÉ SE HIZO Y CÓMO SE HIZO?

El proyecto se llevó a cabo con el objetivo de contribuir al desarrollo de las competencias de comunicación y modelación mediante la estimación del área del lago en forma de cardioide ubicado en la Universidad Icesi, este proyecto se desarrolla en el Curso de segundo semestre Cálculo de una Variable del periodo 2021-2 grupos 01 y 03.

El curso de Cálculo de una variable tiene como propósito central desarrollar en los estudiantes la capacidad de adquirir conocimientos, habilidades y destrezas relacionadas con los elementos más relevantes del área, como son el cálculo diferencial e integral. Priorizando aquellas cuyas aplicaciones sean de la propia ciencia y de contextos propios de sus carreras. Al finalizar el curso el estudiante estará en la capacidad de aplicar los procesos del cálculo diferencial e integral en una variable en el análisis y solución de problemas en contexto de las ciencias e ingeniería. El curso está diseñado en 4 unidades: Unidad 1: Límites, Unidad 2: Derivadas, Unidad 3: Aplicación de las derivadas y Unidad 4: Integrales.

El proyecto se presentó en la semana 12 en la unidad de integrales y sumas de Riemann. En este sentido, el proyecto se llevó a cabo en dos momentos: supuestos teóricos y estructura del diseño metodológico.

Supuestos Teóricos

Para el MEN una competencia se define como el Conjunto de conocimientos, actitudes, disposiciones y habilidades (cognitivas, socioafectivas y comunicativas), relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. Por lo tanto, la competencia implica **conocer, ser** y **saber hacer.**

La competencia está asociada con la educación integral y la formación de sujetos críticos que usen los saberes en diferentes contextos socioculturales y reflexionen sobre el uso de los conocimientos en pro de cualificar las condiciones de vida.

El aprendizaje por competencias exige crear un ambiente donde, en primer lugar, se ponga al estudiante como centro y este sea activo en su propio proceso; además el ambiente debe considerar conocimientos previos, contextos oportunos y vivencias de los estudiantes, en tanto que el docente se vuelve un facilitador de aprendizaje. Esto implica que el conocimiento se desarrolla en distintas etapas y teniendo en cuenta todo lo que rodea a los estudiantes.

> *Las competencias además de un ser, de un saber hacer, es un hacer sabiendo, soportado en múltiples conocimientos que vamos adquiriendo en el transcurso de la vida; es la utilización flexible e inteligente de los conocimientos que poseemos, lo que nos hace competentes frente a tareas específicas* (Castaño & Macías, 2005).
>
> *Se puede entender que para desarrollar las competencias en los estudiantes es necesario enfrentarlos a situaciones en contextos reales, relacionándolos con las competencias ciudadanas y laborales; siendo un todo que se conjuga para que ellos puedan usar el conocimiento adquirido en diferentes problemas. (Tobon, 2004) y (Torrado, 2000). Un individuo competente matemáticamente debe caracterizarse no por qué tanto sabe de matemáticas, sino lo que hace con ellas.* (Castro Monserrat & Marin, 2019).

Competencias para desarrollar

Con el proyecto se pretende aportar al desarrollo del pensamiento Variacional, entendiéndolo como:

> *El pensamiento variacional es concebido como una forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, de la misma o distintas magnitudes, en los subprocesos recortados de la realidad* (Vasco, 2000).

Pensar variacionalmente permite desarrollar capacidades para utilizar diferentes representaciones, interpretarlas y analizar activamente lo que sucede en la otra representación, si se modifica una condición particular. Por otro lado, las competencias que se pretenden desarrollar con la actividad son la comunicación y la modelación. En este sentido, entendemos cómo comunicar en matemáticas es:

> *El conjunto de capacidades, habilidades y cualidades que tiene la persona para comprender e interpretar contenidos matemáticos expresados en forma oral o escrita, haciendo uso del lenguaje propio de la comunidad matemática en la que participa de los procesos de construcción y negociación de significados, con base en un discurso*

> ***de calidad y de normas de comportamiento, para convertirse en un miembro activo de la comunidad de aprendizaje, siendo capaz de solucionar problemas del contexto, usando la matemática como herramienta*** (García, Coronado y Giraldo, 2017).

Este trabajo se llevó a cabo en grupos aproximados de 4 estudiantes, lo que permitía el complemento de ideas y el debate, aportando a potenciar la comunicación matemática.

> ***La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver ecuaciones, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica.*** (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

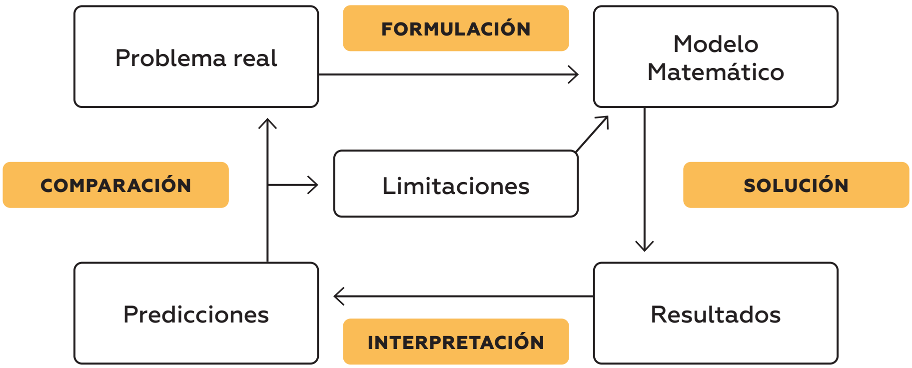
Por otro lado, Benítez (2006) describe que la modelación en matemáticas y la resolución de problemas juega un rol importante en la educación, por lo cual el currículo debe permitir que el estudiante adquiera de manera progresiva reconocimientos de patrones y relaciones, para poder desarrollar la capacidad de representar modelos de las situaciones dadas. El uso de tecnologías en la modelación juega, hoy por hoy, un rol fundamental, permite construir modelos de problemas en contextos reales sin tener una formación sólida en matemáticas, el estudiante pudiera hacer conjeturas simples de modelos más estándar, pero la tecnología permite hacer, en edades tempranas, modelos de estructuras más elaboradas que involucren álgebra, ecuaciones diferenciales usando funciones en varias variables.

Contexto. Según Freudenthal contexto significa ese "dominio de la realidad el cuál, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno para ser matematizado" (1991). Los contextos son considerados como un aspecto íntimo al problema, este permite a los estudiantes suponer una situación, representarla esquemáticamente mediante un modelo y, por medio de este modelo, llegar al resultado del problema en cuestión (Heuvel-Panhuizen, 1996).

Martínez Silva, M. y Gorgorió i Solá, N. (2004) hacen la distinción de los términos contexto real, contexto simulado y contexto evocado. El contexto utilizado en este proyecto fue un contexto real, el cual se refiere a la situación de prácticas "reales" de las matemáticas, al entorno socio-cultural donde esta práctica tiene lugar, en este ámbito, el conocimiento matemático es usado para resolver una situación de carácter práctico. Ejemplos de estas situaciones son las actividades de compraventa, el uso de un plano para orientarse en una ciudad, la interpretación de los gráficos o el uso de conceptos y procedimientos matemáticos en las distintas prácticas profesionales.

En este sentido, el punto de partida del proyecto es el análisis de un problema real dado que este tipo de problemas tienen una dificultad mayor al intentar ser modelado debido al número, por lo general, grande de variables presentes. La idea es que se pueda partir de un caso particular y llegar a lo más general, usando conocimientos previos, implementando aspectos históricos y epistemológicos e implementando la tecnología. El siguiente esquema presentado por Benítez (2006) resume la idea anterior.

FIGURA —— 2
Modelación a partir de un contexto real



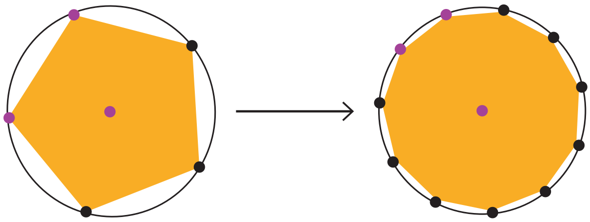
ASPECTOS MATEMÁTICOS

La Integral y sumas de Riemann

El cálculo de la integral tiene sus inicios en la antigüedad griega, donde se pretendía encontrar áreas de figuras cuadradas y triangulares usando los métodos de cálculo de área a través de los métodos de cuadratura.

Sin embargo, rápidamente se encontraron con figuras cuyo método de cuadratura no era eficiente, por ejemplo el área de figuras no cuadradas como el círculo y la parábola acotada por un segmento. El primer matemático griego en plantear un método para el cálculo de áreas de figuras no regulares fue Arquímedes (287-212 a.C.) que fue el método Exhaustivo. Este método consiste en agotar una figura plana a través de polígonos de áreas conocidas. Entre más polígonos inscriba o circunscriba en la figura, mejor será su aproximación de área.

FIGURA — 3
Método Exhaustivo



Esto no significó un avance importante en la época, sin embargo, vemos los atisbos del concepto de límite y el concepto de integral. Esto porque modernamente, podemos entender e interpretar lo que dijo Arquímedes, para calcular el área del círculo se deben inscribir polígonos de infinitos lados, dicho de otra forma

$$\sum_{i=3}^{n} p_n$$

Con pasos lentos transcurre alrededor de 20 siglos donde se asoma los avances más significativos del cálculo diferencial integral con Newton y Leibniz. Newton intentaba desarrollar una forma a través de series de potencias a partir de su método de Fluxiones y la interpolación, que rápidamente desembocaron en problemas de convergencia. Estos principios se fundamentaron con J. Bernoulli, quien escribió el primer curso sistemático de cálculo integral en 1742. Por otro lado, Leibniz fundamentó estrategias para el cálculo de la primitiva o antiderivada, sin embargo, se centró en la integral definida y expresó la integral tal y como se conoce hoy en día

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Fue finalmente Euler quien establece criterios de búsqueda de áreas y volúmenes, resuelve los problemas de las cuadraturas y resuelve problemas con ecuaciones diferenciales dando así los principios del cálculo integral. El problema de la cuadratura se resuelve y se fundamenta en el análisis matemático como una rama fundamental de las matemáticas

Sumas de Riemann. Una suma de Riemann es una aproximación del área bajo la curva, al dividirla en varias formas simples (tales como rectángulos o trapecios). En una suma de Riemann izquierda aproximamos el área con rectángulos (normalmente de ancho igual), donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo izquierdo de su base.

En una **suma de Riemann derecha** la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo derecho de su base.

FIGURA —— 4
Sumas inferiores de Riemann

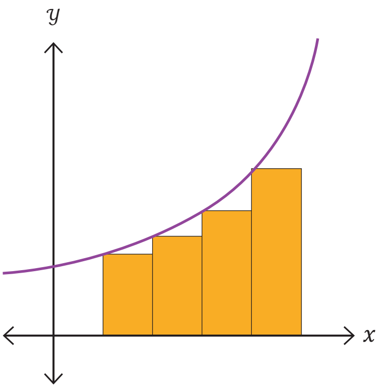
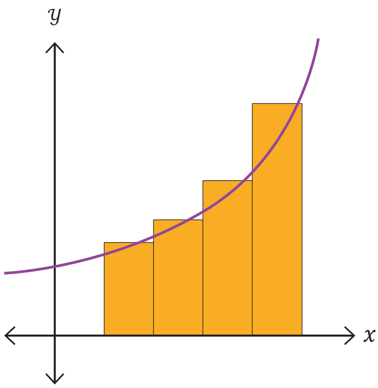
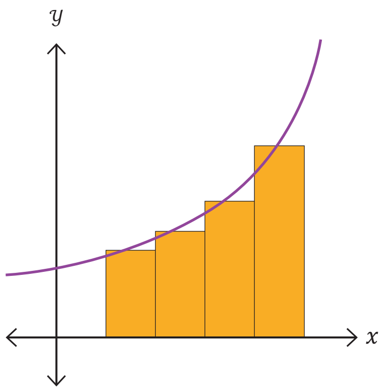


FIGURA —— 5
Sumas superiores de Riemann



En una **suma de Riemann de punto medio** la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el punto medio de su base.

FIGURA —— 5
Sumas de Riemann



Las sumas de Riemann realmente son una aproximación numérica al valor de la integral, lo que sucede con mucha frecuencia ya que en contextos reales no se conoce la función (o modelo) por lo que el cálculo debe hacerse utilizando estrategias de aproximación numérica como sucedía con el método exhaustivo.

Estos hitos histórico-epistemológicos dejan entrever que el desarrollo de la integral sufrió avances y retrocesos a lo largo de su historia, aportes de gigantes, parafraseando a Newton, permitieron hoy por hoy el estudio del Cálculo Integral y el análisis matemático como ramas reconocidos y fundamentales de las matemáticas (Recalde, 2018).

Uso e implementación de la tecnología**.** El uso de herramientas tecnológica en la educación ha centrado la atención de expertos, debido a su versatilidad, ha desplazado de manera vertiginosa prácticas de aula centrada en lápiz y papel. El fácil acceso hoy en día a los medios tecnológicos posibilita mucho más la tarea de implementarlos en el aula.

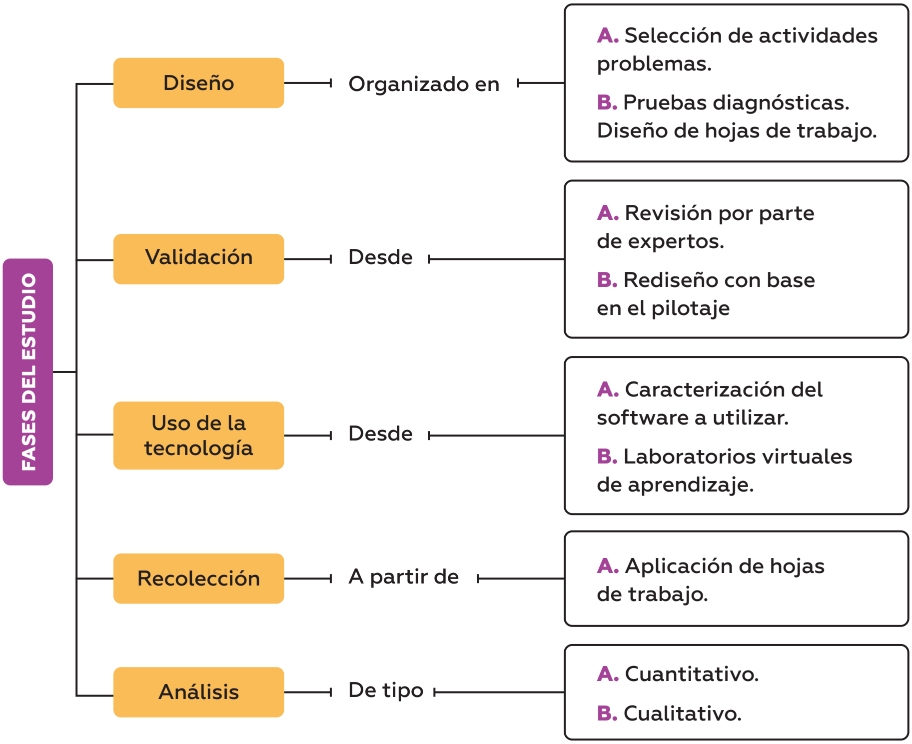
El uso de herramientas tecnológica en el aula tiene distintos roles como el de motivador, permite capturar mucho más la atención, permite interacción dentro y fuera del aula, potencia la autonomía, es flexible, permite la exploración constante y aporta al pensamiento crítico. En este sentido, docentes y expertos deben promover situaciones didácticas mediadas por tecnología, evaluar su potencial y posibles riesgos de la implementación, generando así, un ambiente sano de aprendizaje, donde el recurso tecnológico sea el medio y no el fin.

DISEÑO METODOLÓGICO

Fases del proyecto

Para el diseño e implementación del proyecto, se tuvieron en cuenta las fases propuestas por el profesor David Benítez en su tesis doctoral (2006): A continuación, se explica lo realizado en cada una de las fases.

FIGURA —— 7
Fases del estudio



Fuente: elaboración propia (2020).

Diseño. El diseño de las hojas de trabajo se elaboró teniendo en cuenta el programa del curso y las rutas construidos por los docentes, considerando el formato de expectativas, saberes y competencias. Luego se hizo una selección del tema o concepto a utilizar y en una deliberación se seleccionó la integral por su versatilidad en la aplicación en problemas de contexto real; finalmente, se realizó una selección del problema. Esto pasa por una investigación del campus universitario, la creatividad de los docentes y la localización geográfica de la universidad y sus fuentes hídricas. Se intentó que todo esto estuviera mediado por una situación cercana a los estudiantes, relaciones interpersonales que los hicieran sentirse identificados y los hiciera responsables de dicha solución.

Validación. Para la validación del proyecto se utilizaron las siguientes dos técnicas:

- **Coevaluación:** como se mencionó anteriormente, el proyecto tuvo el aporte y revisión de un doctor en educación y matemático y dos magister en educación, de formación matemático y filósofo respetivamente. Sus revisiones y aportes permanentes y reflexivas permitieron la construcción de las hojas de trabajo, el análisis y reflexión de los datos, el acompañamiento en aula, la revisión y análisis de clases y programas de curso, como la ficha técnica de presentación. Este proceso valida, en primera medida, el proyecto que se implementó en el curso.
- **Pilotaje:** una prueba piloto en el mismo curso y con igual número de grupos se llevó a cabo el semestre 2021-2. Este piloto permitió reconocer aciertos y desaciertos de la hoja de trabajo, corrigiendo, con ayuda de los expertos, aquellas prácticas que no fueron relevantes o generaron inconvenientes, además fortalecer aquello que tuvo éxito y fue relevante para el proyecto.

Implementación de Tecnología. La implementación de la tecnología se llevó a cabo en el momento en que fue necesario el uso del modelo de regresión para modelar el problema propuesto. En este sentido, se llevó una explicación de tipo teórica el primer día de la implementación acerca de la importancia del modelo y en la segunda sesión, con apoyo audiovisual, se explicó el modelo de regresión en GeoGebra. No se llevó a cabo un taller de comandos básicos GeoGebra debido al conocimiento previo que tenían los estudiantes del programa. Sin embargo, en las asesorías, la docente estuvo pendiente de preguntas relacionadas con el tema.

Recolección de datos. Para la recolección de datos se llevaron a cabo dos hojas de trabajo, en la primera hoja de trabajo se recolectó, en la tabla adjunta, los métodos que propusieron los grupos de trabajo y la clasificación de estos. En esta fase, el trabajo fue autónomo de los grupos, se trató de intervenir en sus discusiones, estando atenta todo el tiempo al tipo de expresiones usadas; posteriormente, se pidió que hicieran una exposición al resto del grupo para comunicar sus ideas. En la segunda hoja de trabajo se expuso el concepto formal de la Integral presentando, primero, el método exhaustivo que luego evoluciona a las sumas de Riemann y luego al Teorema fundamental del Cálculo. Se resalta la importancia del modelo (función) como requisito para la integración y el cálculo del área bajo la curva y la implementación de la tecnología en la búsqueda del modelo de regresión. El producto final solicitado a los estudiantes es un artículo de investigación.

Análisis de datos. El análisis de datos se lleva a cabo en dos fases propuestas bajo la metodología cualitativa:

- **Fase 1:** recolección de datos de encuestas de opinión y entrevistas, en las que se cruza la información de los aspectos más importantes como relevancia, coherencia, eficacia y calidad de los recursos utilizados.
- **Fase 2:** análisis mixto de los talleres y respuestas a ejercicios planteados a la luz de las temáticas sugeridas.

MATERIALES Y RECURSOS

En este proyecto se utilizaron los siguientes materiales y recursos:

a. **GeoGebra:** es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadísticas y cálculo en un solo motor. El programa permitió encontrar el modelo buscado, además de una excelente precisión del área solicitada.

b. **Hoja de trabajo:** es la secuencia didáctica planteada para los estudiantes y docentes, explica el paso a paso de lo que se hace en cada fase de la implementación del proyecto.

c. **Cinta métrica:** referencia a los instrumentos para toma de medida que usaron los estudiantes, está en la categoría de recursos manipulables el cual permitió medir en campo y hacer una toma de datos.

d. **Hoja milimetrada:** el objeto de hacer una excelente precisión se usaron hojas de milímetros que permitían ubicar puntos decimales en el plano con un mínimo margen de error

La fase de apropiación instrumental

En esta fase se expuso a los estudiantes a dos sesiones teórico prácticas sobre el manejo del Software GeoGebra, como se mencionó, no se tuvo taller de manejo básico. En la sesión 3 de la semana 13 de la implementación del proyecto se dictó el taller Regresión con GeoGebra, usando como base ejemplos presentados en clase. Se llevó a cabo la implementación de la hoja de cálculo en GeoGebra clásico y el manejo de análisis de regresión de dos variables para hacer la respectiva aproximación al polinomio y posteriormente a la integral, en la siguiente sesión se tuvo en cuenta un análisis polinomio y el margen de error del mismo, usando varias veces el sistema de regresión para aproximar con más exactitud el polinomio que modelara el lago.

Implementación

La actividad del proyecto consistía en buscar el lago de la universidad Icesi que tiene forma de corazón (cardiode) y buscar formas empíricas o formales de determinar el área superficial del lago. A continuación, se presentan las hojas de trabajo, que se implementaron en el curso de Cálculo de una variable, grupos 01 y 02 del semestre 2022-1:

En busca del área del lago. La universidad Icesi cuenta con una amplia zona verde bañada por distintas fuentes hídricas y el paso de la quebrada Gualí, que constituye un brazo del río Pance y se utiliza para las operaciones de riego dentro de la universidad Dentro del campus Universitario existe un lago pequeño en tamaño, pero significativo para su comunidad, pues este lago tiene forma de corazón.

FIGURA —— 8
Hoja de trabajo #1: Área del lago

<table>
<tr><td colspan="4">HOJA DE TRABAJO NO.1
PARTE 1</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo de aprendizaje
Analizar y definir el concepto de área y volúmen a partir de la comprensión de la intengral como fundamento y herramienta de ecuaciones diferenciales.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Pensamiento Variacional</td></tr>
<tr><td colspan="3">Competencias matemáticas asociadas a la meta de aprendizaje</td><td>Comunicar
Modelar</td></tr>
<tr><td colspan="2">Concepto</td><td>Sumas de Riemann e integral definida</td><td>Unidad 3
Programa del curso</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Descripción</td><td rowspan="2">En esta guía de trabajo se desarrolla el concepto de área a partir de dos procesos:
1. Método exhaustivo
2. Integral definida</td><td>Duración</td><td>1 semana: 2 sesiones</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td>GeoGebra
Cinta métrica
Tabla de apuntes
Libro guía</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia

FIGURA —— 9
Lago Universidad Icesi

En una discusión frenética Marlon y su novia Margot, pasan a un lado del lago, donde rápidamente Margot lo ve y le dice a Marlon que si él en verdad la quiere deberá encontrar el área del lago en forma de Corazón. Ustedes como 4 de los mejores amigos incondicionales de Marlon desean ayudarle a resolver el dilema, pero ¿cómo es posible calcular el área del lago en forma de corazón?

TAREAS

Tarea 1: métodos propuestos para calcular el área del lago. En grupos de trabajo discutir y reflexionar sobre las posibles técnicas y métodos para calcular el área del lago. Una vez se haya llevado a cabo la reflexión, elegir **3 métodos** y completar la tabla

Tarea 2: clasificación de métodos. En la clase exponer la tabla elaborada anteriormente, esto le permitirá al grupo ver diferencias y similitudes con las propuestas de los otros grupos. Finalmente, con ayuda de la docente, clasificar sus métodos.

Una vez se ha llevado a cabo la socialización de los métodos, se hace la presentación de conceptos de sumas de Riemann, Integral definida y TFC. Antes de la presentación de la segunda versión del TFC se solicita a los estudiantes completar la siguiente información (Figura 10).

Una vez se haya llevado a cabo la socialización, durante la clase, de las ideas, se lleva a cabo la presentación del trabajo final.

Tarea 3: artículo de investigación. Después de los análisis hechos en clase, en grupos de trabajo elegir dos de los métodos (estos pueden ser los mismos presentados en la tabla o se pueden cambiar). Con los métodos elegidos y llevándolos a la práctica, escribir un artículo de investigación con la implementación, análisis y conclusión de la aplicación de dichos métodos. Para la escritura del artículo se debe tener en cuenta el formato sugerido presentado en clase.

FIGURA —— 10
Hoja de trabajo #2

HOJA DE TRABAJO NO.1		
Objetivo de aprendizaje Comunicar de manera efectiva el significado epistemológicp y didáctico del TFC		
Pensamiento Variacional		
Competencias matemáticas asociadas a la meta de aprendizaje		Comunicar
Concepto	Sumas de Riemann e integral definida	Unidad 3 Programa del curso Tiempo: 1 sesión
Completar la siguiente información		
Teniendo en cuenta lo visto en clase define con tus palabras: a) ¿Qué es una integral? b) ¿Para qué sirve una integral definida? c) ¿Para qué sirve una integral indefinida? d) Explica qué significa el teorema fundamental del Cálculo		

Fuente: Elaboración propia

Análisis de resultados

El análisis, que se llevó a cabo con una metodología cualitativa, sugiere, de manera íntima, una vivencia del investigador con los observados. Recomienda un proceso reflexivo y dinámico que se alimenta fundamentalmente de la experiencia de los investigadores con los escenarios estudiados[3], en este sentido, se extraen conclusiones de datos no estructurados y heterogéneos que no son expresados de forma numérica o cuantificable.

Se analiza a profundidad las encuestas y entrevistas recogidas, además los escritos entregados por los estudiantes y las exposiciones (oral)

3. (Amezcua & Galvez, 2002).

de sus registros, se analizan las respuestas a las preguntas realizadas y se observan los estados de (ánimo - expresión corporal) los gestos y figuras utilizadas por su propio cuerpo para expresar un resultado, interpretando este a la luz de la teoría. Las fases de análisis sugeridas son las siguientes:

Fase temprana de comunicación: son las primeras expresiones orales usadas por los estudiantes, explicando, en sus propios términos, los métodos y procesos a utilizar para el cálculo de área.

Fase intermedia: fase tiene un componente conceptual, pero no es totalmente formal, a los estudiantes se les hace una presentación temprana del concepto sugerido (La integral) para la resolución del problema propuesto. Los estudiantes responden un cuestionario con preguntas dirigidas. En esta fase no hay mediación de tecnología.

Fase formal: grupo de estudiantes debe presentar un informe escrito, tipo artículo de publicación, dando solución al problema: hallar el área del lago. En esta fase formal hay mediación tecnológica (GeoGebra) y acompañamiento del docente con sesiones de asesorías grupales. Se revisará en el documento el nivel de formalismo usado, las estrategias o heurísticas para resolver el problema y el grado de aporte tecnológico para la resolución del problema (método de regresión) y las conclusiones.

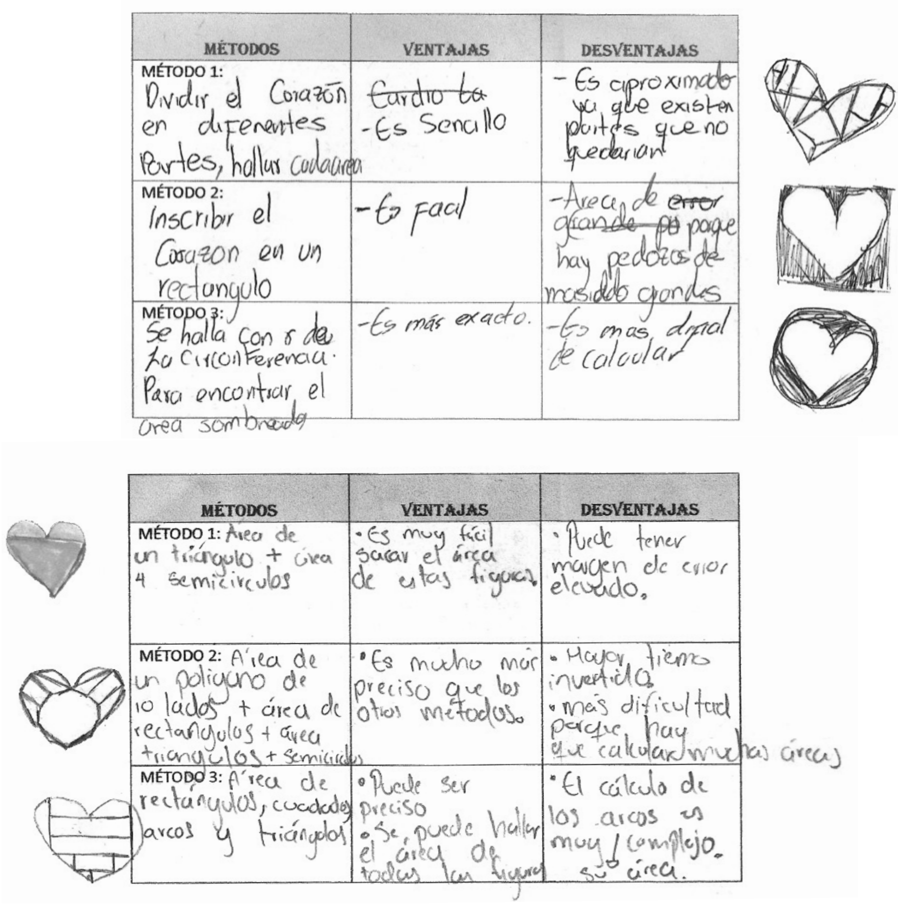
Recolección de datos

Se utilizaron 2 hojas de trabajo para hacer la recolección de datos, el trabajo se hizo de manera individual y grupal siempre en compañía del docente. En todo el proceso la comunicación, como habilidad central, estuvo presente, especialmente en la escritura y oralidad. De la primera hoja de trabajo parte 1, la cual se aplicó a 33 estudiantes [18 mujeres y 15 hombres] se obtuvo la solución del cuadro #1, se indaga por el reconocimiento y discusión de 3 métodos distintos que permitieran resolver el problema de Cálculo de área del lago.

En este primer resultado se obtiene una consolidación del método exhaustivo como método preferido; como se puede ver en algunas de sus respuesta, la mayor población elije métodos de divisiones de las figuras, aunque de distintas formas, las divisiones suponen una idea preconcebida de construir dentro de la figura, figuras más pequeñas cuyas áreas sean conocidas, por lo general cuadrados, círculos o triángulos sobrepuestos de distintas formas; un segundo grupo, más reducido, elije como método la concepción de integral, suponiendo una función previa y calcular la

FIGURA —— 11

Algunas respuestas de los estudiantes al cuadro de métodos para calcular el área del lago



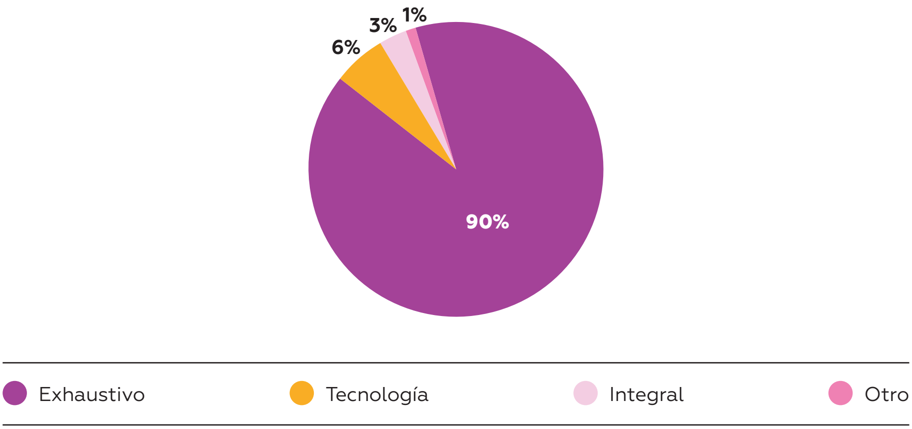
MÉTODOS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
MÉTODO 1: Dividir el Corazón en diferentes Partes, hallar cada área	~~Cardio ta~~ -Es Sencillo	- Es aproximado ya que existen partes que no quedarían
MÉTODO 2: Inscribir el Corazon en un rectangulo	-Es facil	-Area de ~~error grande ps~~ porque hay pedazos de medida grandes
MÉTODO 3: Se halla con r de la circonferencia. Para encontrar el área sombreada	-Es más exacto.	-Es mas dificil de calcular

MÉTODOS	VENTAJAS	DESVENTAJAS
MÉTODO 1: Área de un triángulo + área 4 semicírculos	• Es muy fácil sacar el área de estas figuras	• Puede tener margen de error elevado.
MÉTODO 2: Área de un polígono de 10 lados + área de rectángulos + área triangulos + semicirculos	• Es mucho más preciso que los otros métodos.	• Mayor tiempo invertido • más dificultad porque hay que calcular muchas áreas
MÉTODO 3: Área de rectángulos, cuadrados arcos y triángulos	• Puede ser preciso • Se puede hallar el área de todas las figuras	• El cálculo de los arcos es muy complejo. su área.

integral definida; un grupo final elije como método la posibilidad de uso de tecnología como drones y GeoGebra.

En esta fase del proyecto se espera que los estudiantes se sensibilicen sobre la importancia del saber hacer, es clave sus conocimientos previos, pero es necesario complementar con nuevas capacidades y habilidades, las cuales, según Solar, García y Rojas (2014) ponen a los estudiantes en el centro, al docente facilitando, sin dar solución, y abriendo el panorama de las distintas posibles soluciones y su discusión.

FIGURA —— 12
Distribución de métodos usados para el cálculo del área y su clasificación



Como mencionan García, Coronado y Giraldo (2017) es necesario que el primer paso sea la comunicación del problema para buscar su posible solución, si los estudiantes no comprenden la complejidad del problema no buscarán soluciones. En la parte 2 de la ruta #1 los estudiantes deben exponer a la clase los métodos elegidos; el resto de la clase debe hacer preguntas sobre la viabilidad y calidad de la medición para así, reestructurar o reformar su propuesta en una versión a futuro.

En la hoja de trabajo #2 tarea 1, se lleva a cabo la conceptualización en una fase temprana, la cual es acompañada con una serie de preguntas dirigidas a la discusión. Esta fase de presentación formal se alcanza a través de la presentación, usando videos y la discusión en clase sobre la definición, uso y formalización de la noción de integral, esta fase se llevó a cabo con 31 estudiantes [16 hombres y 15 mujeres]. En esta fase se priorizó la escritura, consolidando datos relevantes y tendencias de las respuestas. El trabajo se hizo de manera cooperativa, buscando que, como mencionan García, Coronado y Giraldo (2017), ellos participen de manera activa, haya discusión y negociación de las ventajas y desventajas de sus métodos; además la búsqueda del modelo, que es la última fase, se hace necesario para resolver el problema.

La tendencia mostró que, al hablar de integral e integral definida, estos conceptos se definen casi de la misma manera, haciendo alusión

FIGURA —— 13
Respuestas a la ruta #2 de un grupo de estudiantes

1. ¿Que es una Integral?
   - Es el proceso inverso a la derivada. Esta representa el area de una figura
2. ¿Para que sirve una integral definida?
   - Para determinar un area estrictamente determinada
3. ¿Para que sirve una integral indefinida
   - Para determina un area no tan determinada
4. Explica el teorema fundamental del calculo
   - la derivada e integral son funciones inversas

al termino “área” mientras que otros grupos hablaron de integral como la función u operación opuesta a la derivada. Lo cual menciona Recalde (2018) es un pensamiento heredado de los griegos, el problema griego principal ha sido la búsqueda de la cuadratura de las curvas, en general, de aquellas que no son cuadradas. Definir integral a partir de esos parámetros es necesario pero incompleto.

FIGURA —— 14
Definición de integral como área bajo la curva

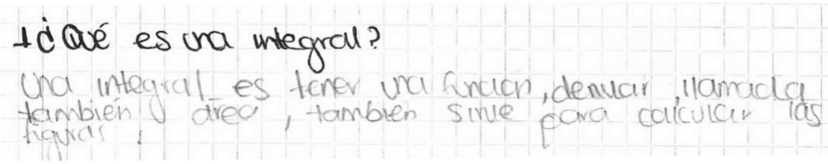
1.) La integral es el área bajo una curva
2.) Para calcular el área de un intervalo deseado de una función.

FIGURA —— 15
Definición de integral como antiderivada

1. Una integral es lo contrario a una derivada.

Cabe mencionar que, si bien ambos conceptos podrían asemejarse, la profundidad epistemológica del concepto de Integral va más allá de la noción de área y debe ser entendida como una aplicación y no como la noción en sí misma (Recalde, 2018). Se obtuvieron también respuestas incorrectas o carentes de sentido que no lograron evidenciar la conjetura de dichas nociones.

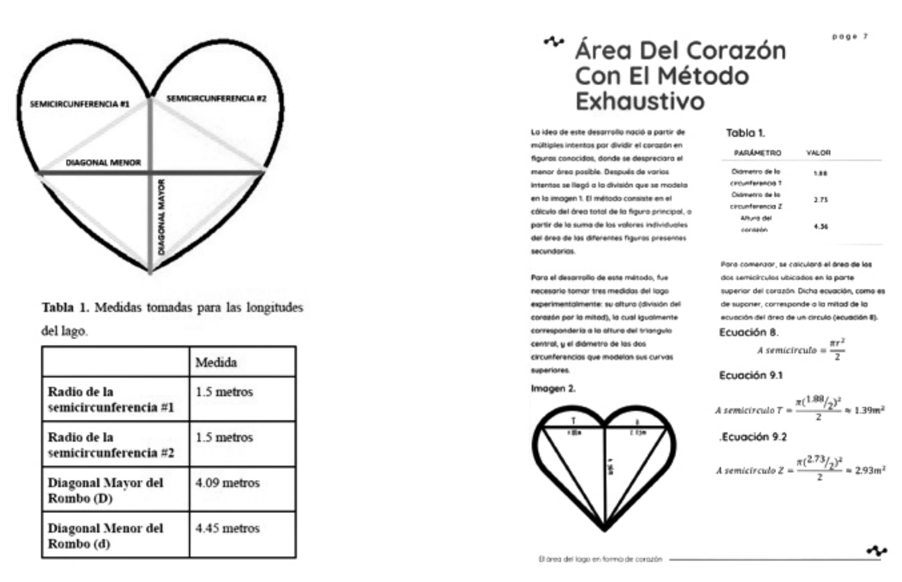
FIGURA —— 16
Respuesta incorrecta


1. ¿Qué es una integral?
Una integral es tener una función, derivar, llamada también área, también sirve para calcular las figuras

Estos resultados nos mostraron que, en general hubo una apropiación del concepto de Integral, integral definida y área bajo la curva. El 87% lograron conjeturar y plasmar sus ideas de Integral y los elementos claves para resolver la tarea de calcular el área del lago. Finalmente, en la ruta #2 tarea 2 se hace la entrega de la recolección de los artículos realizados por los grupos de trabajo sobre la forma como han resulto la tarea de calcular el área del lago en forma de corazón. Se entregaron un total de 10 artículos, los cuales mostraron de manera formal, el cálculo del área. El método exhaustivo siguió siendo uno de los preferidos, sin embargo, la evolución del método fue más precisa y con menos margen de error. 6 de los 10 artículos tomaron como base el método exhaustivo para el cálculo de área. 8 de los 10 artículos tomaron como método secundario o base el uso de la integral definida para el cálculo de área, usando distintos métodos para encontrar la ecuación correspondiente. El 80% de los artículos usaron la ecuación del cardiode.

Lo que se supone dentro del cálculo de área del lago es asumir valores ideales y reemplazarlos en la ecuación; usando planos y ecuaciones polares. El método en general les resultó más confiable puesto que el modelo matemático presupone unos valores cercanos y reales; la dificultad de este método se encuentra en que la figura es totalmente irregular y asumir que pueda ser una cardiode real y completa crea un margen de

FIGURA —— 17
Uso del método exhaustivo



SEMICIRCUNFERENCIA #1
SEMICIRCUNFERENCIA #2
DIAGONAL MENOR
DIAGONAL MAYOR

Tabla 1. Medidas tomadas para las longitudes del lago.

	Medida
Radio de la semicircunferencia #1	1.5 metros
Radio de la semicircunferencia #2	1.5 metros
Diagonal Mayor del Rombo (D)	4.09 metros
Diagonal Menor del Rombo (d)	4.45 metros

page 7

Área Del Corazón Con El Método Exhaustivo

La idea de este desarrollo nació a partir de múltiples intentos por dividir el corazón en figuras conocidas, donde se despreciara el menor área posible. Después de varios intentos se llegó a la división que se modela en la imagen 1. El método consiste en el cálculo del área total de la figura principal, a partir de la suma de los valores individuales del área de las diferentes figuras presentes secundarias.

Para el desarrollo de este método, fue necesario tomar tres medidas del lago experimentalmente: su altura (división del corazón por la mitad), la cual igualmente correspondería a la altura del triangulo central, y el diámetro de las dos circunferencias que modelan sus curvas superiores.

Imagen 2.

Tabla 1.

PARÁMETRO	VALOR
Diámetro de la circunferencia T	1.88
Diámetro de la circunferencia Z	2.73
Altura del corazón	4.36

Para comenzar, se calculará el área de los dos semicírculos ubicados en la parte superior del corazón. Dicha ecuación, como es de suponer, corresponde a la mitad de la ecuación del área de un círculo (ecuación 8).

Ecuación 8.

$$A\ semicirculo = \frac{\pi r^2}{2}$$

Ecuación 9.1

$$A\ semicirculo\ T = \frac{\pi(1.88/2)^2}{2} \approx 1.39m^2$$

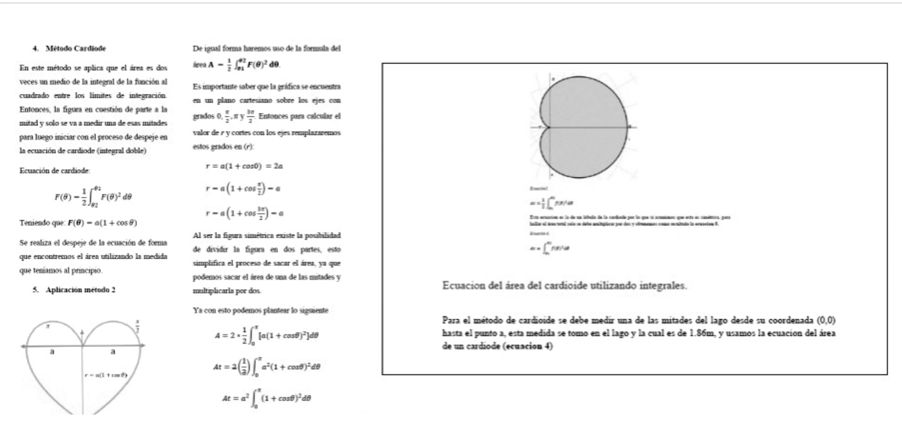
.Ecuación 9.2

$$A\ semicirculo\ Z = \frac{\pi(2.73/2)^2}{2} \approx 2.93m^2$$

El área del lago en forma de corazón

error importante. Sin embargo, el método admite un manejo conceptual significativo por parte de los estudiantes. Muestra lo alcanzado a nivel cognitivo en el curso.

FIGURA —— 18
Método de la integral y ecuación del cardiode



4. Método Cardiode

En este método se aplica que el área es dos veces un medio de la integral de la función al cuadrado entre los limites de integración. Entonces, la figura en cuestión de parte a la mitad y solo se va a medir una de esas mitades para luego iniciar con el proceso de despeje en la ecuación de cardiode (integral doble)

Ecuación de cardiode:

$$F(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\theta 2}^{\theta 1} F(\theta)^2\, d\theta$$

Teniendo que: $\boldsymbol{F(\theta)} = a(1+\cos\theta)$

Se realiza el despeje de la ecuación de forma que encontremos el área utilizando la medida que teníamos al principio.

5. Aplicación método 2

De igual forma haremos uso de la formula del área $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\int_{\theta 1}^{\theta 2} F(\theta)^2\, d\theta$.

Es importante saber que la gráfica se encuentra en un plano cartesiano sobre los ejes con grados $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ y $\frac{3\pi}{2}$. Entonces para calcular el valor de r y cortes con los ejes remplazaremos estos grados en (r):

$$r = a(1+cos0) = 2a$$

$$r = a\left(1+cos\frac{\pi}{2}\right) = a$$

$$r = a\left(1+cos\frac{3\pi}{2}\right) = a$$

Al ser la figura simétrica existe la posibilidad de dividir la figura en dos partes, esto simplifica el proceso de sacar el área, ya que podemos sacar el área de una de las mitades y multiplicarla por dos.

Ya con esto podemos plantear lo siguiente

$$A = 2 * \frac{1}{2}\int_0^{\pi} [a(1+cos\theta)^2]d\theta$$

$$At = 2\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi} a^2(1+cos\theta)^2 d\theta$$

$$At = a^2\int_0^{\pi} (1+cos\theta)^2 d\theta$$

Ecuacion del área del cardioide utilizando integrales.

Para el método de cardioide se debe medir una de las mitades del lago desde su coordenada (0,0) hasta el punto a, esta medida se tomo en el lago y la cual es de 1.86m, y usamos la ecuacion del área de un cardiode (**ecuacion 4**)

El tercer y último caso es el uso de la integral usando el modelo de regresión polinómica usado por el 20% de los grupos de trabajo. En este sentido el cálculo parece ser el más preciso, puesto que, si bien se usa la integral, al obtener la ecuación de manera experimental presupone un margen de error mínimo y la ecuación obtenida se soporta en el uso de tecnología, incorporando su precisión y versatilidad.

FIGURA —— 19
Modelo de regresión y uso de vectores

Figura 8. Análisis de regresión de dos variables

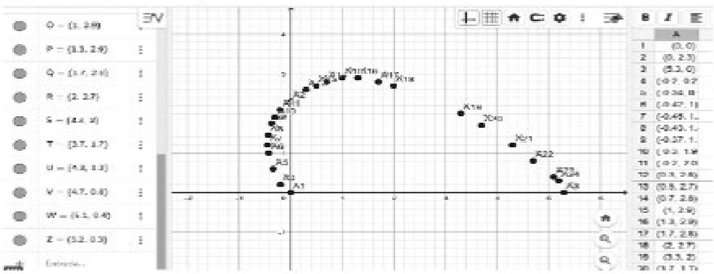


Figura 9. Función aproximada de medio corazón

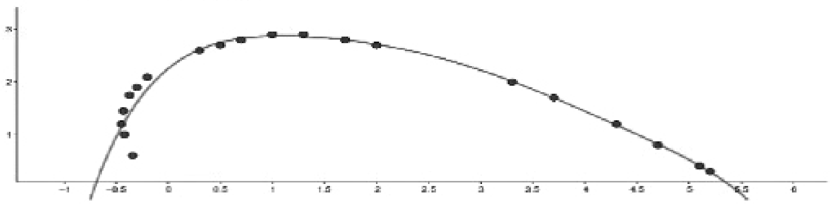


FIGURA —— 20
Ecuación y área obtenidos por el modelo de regresión

Ecuación 5. Integral definida

$$\int_0^{5.3} -0.002x^6 + 0.0348x^5 - 0.2323x^4 + 0.7809x^3 - 1.5656x^2 + 1.6044x + 2.2541\, dx$$

$$= -\frac{x^7}{3500} + \frac{29x^6}{5000} - \frac{2323x^5}{50000} + \frac{7809x^4}{40000} - \frac{1957x^3}{3750} + \frac{4011x^2}{5000} + 2.2541x$$

$$= 11.52\; m^2$$

Estos grupos demostraron, en mayor medida, la comprensión del concepto Integral y el alcance para el cálculo de área, además herramientas de resolución de problemas, teniendo en cuenta obstáculos y errores emergentes por sus mediciones. La búsqueda del modelo (modelación) cerró su ciclo, apoyado en la tecnología. En este sentido se cumplen las etapas de modelación mencionadas por Pollak, H. (2007):

- Identificar una pregunta del mundo real que se quiere entender.
- Seleccionar objetos particulares importantes para la pregunta hecha e identificar relaciones entre ellos.
- Decidir cuáles son útiles e ignorar los que no lo son.
- Trasladar esta versión en términos matemáticos, obtener fórmulas matemáticas para esta pregunta determinada y resolver el problema.

En este sentido se hace necesario implementar nuevos modelos para mediciones más elaboradas, la integral como concepto central del cálculo, define parámetros, pero carece de sentido si no involucramos a los estudiantes a la búsqueda del modelo.

¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

Uno de los grandes aprendizajes que dejó esta implementación fue la posibilidad de contrastar el modelo tradicional con el modelo de pedagogía activa propuesto por la universidad, el estudiante como centro del modelo, es un actor importante al que se debe asignar responsabilidades que van más allá de las tareas sencillas de resolver ejercicios de algoritmos, que suelen ser repetitivos y carentes de sentido, este tipo de hojas de trabajo desarrollan en ellos el trabajo creativo, la habilidad investigativa y la capacidad comunicativa.

Los roles de estudiantes y profesores cambian drásticamente en este modelo, el docente como facilitador debe diseñar las actividades, formarse y actualizarse todo el tiempo, acompañar el proceso sin ser nunca el dueño de la verdad y de la forma de solución, en este modelo, las soluciones son infinitas. El rol del estudiante es distinto, no es pasivo, sus nuevas tareas incluyen trabajar activamente, aprender a aprender, enseñar, investigar y contrastar desarrollando significativamente el pensamiento crítico y constructivo.

El fin de la secuencia didáctica es acompañar el proceso cognitivamente, guía las actividades y cumple una función de estructurar las tareas, diseñada por el docente, permite retroalimentación por parte de pares, expertos incluso por estudiantes, que, al ejecutarla pueden tomar una postura crítica sobre su desarrollo.

En este proyecto se hizo fundamental el apoyo de la tecnología, su rol de mediador permitió potenciar habilidades de visualización y aportar al fin último, que era la modelación del problema. El uso de programas como GeoGebra y Excel facilitan algunos procesos, optimizando tiempo y algoritmos, cálculos extensos, etc. Recordando que es el medio y no el fin, la implementación de la tecnología en la secuencia didáctica enriquece el proceso de aprendizaje.

La solución de problemas en contexto no solo acerca al estudiante al conocimiento, también dignifica la labor del saber hacer, los procesos de enseñanza y aprendizaje basados únicamente en conocimientos o temas, ha sido, por mucho tiempo, el modelo elegido para la educación; sin embargo, en el nivel universitario los cursos deben aportar a esas competencias laborales, más allá del conocimiento, crea necesidades, identifica dificultades y propende, con distintas soluciones, formas de aportar a la resolución del problema. Competencias necesarias para la vida diaria y laboral.

Una de las grandes preocupaciones de los maestros ha sido la motivación de los estudiantes. Encontrar formas de "captar" la atención en estos tiempos parece ser uno de los principales retos que tienen los educadores y las escuelas, pero con este trabajo, el cual movilizó a los estudiantes en todo el establecimiento educativo, los apropió y motivó a buscar formas de dar solución al problema. Resaltar el compromiso de ellos para con su propuesta fue una de las mayores ganancias de la secuencia didáctica, permitiendo establecer que, si hacemos a los estudiantes responsables de buscar el "como", centrándose en el camino y no en el fin, la motivación viene por añadidura y los resultados son grandiosos.

La comunicación oral y escrita, ejes centrales de nuestra secuencia, fue la mayor de las ganancias. Guiar a los estudiantes a comprender explicar, formalizar y escribir hace parte de una competencia mayor que es la comunicación, que toda opinión o idea debe fundamentarse, cuidando la escritura, fomentando ejes de la retórica usada, incluso fomentando el cuidado de derechos de autor es nuestro aporte más grande a sus habilidades y competencias ciudadanas y laborales, incluso aportes de valores como la honestidad.

A modo de recomendación, la diversidad de métodos de solución encontrados en este proyecto, nos dejan entrever que es una metodología que se puede tranversalizar a otros ejemplos, otros cursos y otras ciencias. Es un modelo abierto, propenso a mejorarse, pero con todos los componentes para hacer de una temática agradable y audaz, obteniendo los mejores resultados en los estudiantes, tanto cognitiva como competitivamente, identificando heurísticas nuevas, donde el docente es una aprendiz más en el modelo, tal como lo invita la pedagogía activa de nuestra universidad.

REFERENCIAS

SOLAR, H., García , B., & Rojas , F. (2014). Propuesta de un Modelo de Competencia Matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemtica* , 33-67.

AMEZCUA, M., & Galvez, A. (2002). *Los modos de análisis en investigación cualitativa en salud. Revistad española de salud.*

BENITEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan estudiantes universitarios en la resolución de problemas con el uso de tecnología.* México, distrito federal: CINVESTAV.

CASTAÑO, G., & Macías, V. (2005). Una mirada a las competencias. *Revista Escuela de Administración de Negocios*, 5-25.

CASTRO MONSERRAT, M., & Marin, D. (2019). Competencia digital e inclusión educativa. *Dialnet*, 1-37.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

GARCIA, B., Coronado, A., & Giraldo , A. (2017). Implementación de un modelo teórico a Priori de competencia matemática asociado al aprendizaje de un objeto matemático. *Revista de Investigación desarrollo e innovación*, 301-315.

ICESI, U. (2017). *Proyecyo Educativo Institucional* . Cali : Icesi.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estandares Básicos de competencias.* Bogota: Ministerio de educación nacional.

RECALDE, L. (2018). *LECTURAS DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS.* Cali: Universidad del Valle.

TOBON, S. (2004). *Educación Basada en Competencias.* Bogota: Eco Ediciones.

TORRADO, M. (2000). *Competencias y proyecto pedagógico.* Bogota: Universidad Nacional .

VALENCIA, D. R. (2018). Diseño de una secuencia de actividades didacticas para promover la construcción de la noción de ecuación diferencial ordinaria. *Acta Latinoamericana de matemáticas educativas* , 516-523.

VASCO, C. (2000). *El pensamiento variacional y la modelación matemática.* Cali: Universidad del Valle.

ANEXOS

- Si se toma en cuenta que el método exhaustivo se midió directamente con el metro podríamos decir que este es el más confiable, ya que al cortar la cuerda y medirla se pudo haber cortado un poco menos o un poco más de lo medido.

4. EVIDENCIAS

5. Anexos

EXPERIENCIA 3

Solución de un problema de optimización con ayuda de GeoGebra

PAULA ANDREA GONZÁLEZ PARRA
LINA ESPERANZA SOTO ARCHILA

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es realizar un análisis sobre las estrategias que utilizaron estudiantes del curso Cálculo 1 de la Universidad Autónoma de Occidente en el primer semestre del año 2022, alrededor de una situación problema dada, apoyándose en el *software* GeoGebra y sus conocimientos previos sobre geometría, trigonometría, física y cálculo diferencial. Los resultados revelaron que los estudiantes, pueden modelar una situación problema mediante funciones y a partir de ellas realizar un análisis que les permita concluir o responder a una pregunta propuesta, evidenciando de esta manera competencias como la modelación, comunicación, argumentación y resolución de problemas. Así mismo se evidenció que el uso de herramientas tecnológicas fortalece la competencia de resolución de problemas.

¿EN DÓNDE SE HIZO EL PROYECTO Y LAS CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN?

El proyecto se realizó en la Universidad Autónoma de Occidente, institución de carácter privado con acreditación de alta calidad, ubicada en la comuna 22, al sur de la ciudad de Santiago de Cali. La universidad cuenta con programas de tipo tecnológico (10), profesional (29), especialización (41), maestría (8) y doctorado (3). La población universitaria, en su mayoría, pertenece a los estratos socioeconómicos 2 (22,5%), 3 (34,2%) y 4 (20,4%).(Datos tomados de https://www.uao.edu.co/informacion-institucional/la-uao-en-cifras/)

El trabajo se realizó con un grupo de estudiantes de Cálculo 1, en el primer semestre del año 2022. En este semestre se retomaron las clases presenciales después de un poco más de dos años en la modalidad denominada presencialidad virtual, debido a la Pandemia del COVID-19.

El curso de cálculo 1 es tomado por estudiantes de ingeniería de segundo semestre con edades entre 17 y 22 años. El grupo estaba conformado por 20 estudiantes, 4 mujeres (20%) y 16 hombres (80%), pertenecientes a los programas académicos de ingeniería mecánica, mecatrónica, industrial, biomédica, electrónica e informática. En el curso de cálculo 1 los ejes temáticos son límites y continuidad, derivadas, integrales y series. Es el segundo curso ofrecido por el departamento de matemáticas para los estudiantes de la facultad de ingenierías, quienes en el semestre anterior han tomado el curso de matemáticas fundamentales, en el que los ejes principales son números reales, espacio y medida y funciones reales en una variable real.

¿QUÉ SE HIZO Y POR QUÉ?

Se propone a los estudiantes un espacio que posibilita no solamente una situación problema en un contexto matemático, sino que además favorece la conceptualización, simbolización y aplicación de conceptos previos; en la primera parte y de forma individual, los estudiantes respondieron preguntas que dieran cuenta de los pre-saberes. En el salón de clase cada uno de los estudiantes respondió preguntas relacionadas con trigonometría (preguntas 1-4) y física (pregunta 5), como tarea los estudiantes respondieron las preguntas relacionadas con optimización (preguntas 6 y 7). Luego, en el laboratorio de matemáticas y en grupos, trabajaron la segunda parte en la que se buscaba analizar y modelar la situación específica planteando una función que mostrará la forma más efectiva de solución de la situación planteada.

En la primera parte (pre-saberes), se propuso a los estudiantes preguntas que podían responder haciendo uso de sus conocimientos previos, estas preguntas estaban dirigidas a indagar sobre teoremas y propiedades de los triángulos rectángulos, la relación entre velocidad, tiempo y distancia; y cómo hallar el mínimo de una función tanto gráfica como analíticamente (Anexo 1). En la segunda parte se expone la situación problema específica (ver Anexo 2). Para esto se plantean unas preguntas iniciales en las cuales, de forma exploratoria, los estudiantes proponen diferentes soluciones propias al problema. Después se les pide utilizar el recurso didáctico https://www.geogebra.org/m/m9pchdbx, el cual fue creado en GeoGebra específicamente para este trabajo, con el objetivo de explorar y analizar la relación ángulo-tiempo y de esta manera identificar el camino óptimo para llegar a la cabaña y compararlos con sus soluciones propuestas previamente.

Posteriormente los estudiantes responden algunas preguntas relacionadas con la situación problema (pregunta 7 - Anexo 2), en la que deben utilizar sus conocimientos de física y razones trigonométricas con el fin de plantear una función específica que modela el comportamiento de esta situación, una vez encontrada esta función, realizan la gráfica en GeoGebra y obtienen el mínimo de la función dada en el intervalo sugerido de acuerdo a la situación particular, el cuál es comparado y debe coincidir con el valor encontrado, analizando la tabla obtenida con el recurso GeoGebra proporcionado (pregunta 4 – Anexo 2).

Finalmente, se les pide comparar los procesos algebraicos con la utilización de herramienta GeoGebra para resolver el problema planteado. Siendo conscientes de la dificultad que presenta para los estudiantes la resolución de problemas que involucran un contexto matemático, debido no solamente a posibles errores a la hora de enfrentar estas situaciones, el requerimiento de ciertos procesos cognitivos y las emociones en ocasiones negativas que evocan, por ser esta una de las áreas con mayor dificultad (Martínez 2002), el objetivo de esta actividad fue fortalecer la competencia de resolución de problemas con la ayuda de la herramienta GeoGebra. En adelante se especificarán los logros alcanzados con esta implementación y las ventajas del uso del software como elemento que fortalece la participación de los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

¿CÓMO SE HIZO EL PROYECTO?

El proyecto fue ejecutado en dos etapas, la primera fue el diseño de la hoja de trabajo a presentar a los estudiantes y la segunda la ejecución del problema planteado. Para esto fue necesario tener en cuenta las competencias matemáticas que el estudiante debía desarrollar (resolución de problemas, modelación, comunicación, argumentación), el uso de la herramienta tecnológica (software GeoGebra), los niveles de pensamiento (numérico, variacional, espacial), y la teoría del aprendizaje por descubrimiento según el pedagogo estadounidense Jerome Bruner.

Diseño de la hoja de trabajo

La hoja de trabajo se estructuró en dos partes: los pre-saberes, basado en preguntas propuestas, para llevar al estudiante a indagar sobre los conocimientos previos que eran necesarios para dar solución a la situación planteada. En la segunda parte se propone una situación matemática realista del cálculo diferencial, la cual, por medio de una serie de preguntas, fue encaminando al estudiante, hasta llevarlo al análisis de la situación y solución de la misma.

Resolución de problemas (Romo, 2015)

Es un proceso conductual, manifiesto o cognitivo, que hace que esté disponible una cantidad de alternativas de respuestas potencialmente eficaces para enfrentarse a los problemas y que aumenta la probabilidad de seleccionar la respuesta más eficaz de entre distintas alternativas.

Modelación (Villa et al., s.f.)

El proceso de modelación matemática viene siendo considerado como una actividad científica que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias. Este se puede considerarse como un ciclo que se desarrolla a través de una serie de etapas de acuerdo con Berryy, J. & Davies, A. (1996) citado en Crouch, R. & Haines, C, (2004, p. 198), se desarrolla a través de unas etapas; a saber: la declaración del problema en el mundo real; formulación de un modelo; solución matemática; interpretación de los resultados; evaluación de la solución; refinamiento del modelo y [nuevamente] la declaración del problema en el mundo real. Potenciando de esta manera el desarrollo de las capacidades en el estudiante para posicionarse de manera crítica ante las diferentes demandas del contexto social, junto con la capacidad para leer, interpretar, proponer y resolver situaciones problema.

Comunicación
(https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf, s.f.)

> Las distintas formas de expresar y comunicar las preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos no son algo extrínseco y adicionado a una actividad matemática puramente mental, sino que la configuran intrínseca y radicalmente, de tal manera que la dimensión de las formas de expresión y comunicación es constitutiva de la comprensión de las matemáticas. Podría decirse con Raymond Duval que, si no se dispone al menos de dos formas distintas de expresar y representar un contenido matemático, formas que él llama "registros de representación" o "registros semióticos", no parece posible aprender y comprender dicho contenido.

Argumentación
(https://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/suma_2010.pdf, 2010)

> En el desarrollo de una argumentación que va dirigida a la justificación, no basta con producir argumentos, sino que es necesario someterlos a un examen de aceptabilidad. Duval (1999) utiliza los criterios de pertinencia y fuerza para decidir sobre la aceptabilidad de un argumento. La pertinencia del argumento es la relación entre los contenidos de la afirmación y del argumento que la justifica, teniendo que ocurrir que los contenidos semánticos se sobrepongan. La fuerza del argumento depende de: a) la resistencia que presente a contra-argumentos, es decir, que no tenga réplica; y b) el valor epistémico positivo, es decir, que sea evidente, necesario y auténtico.

Software GeoGebra (Espeso, 2016)

> GeoGebra es una plataforma para crear representaciones gráficas relacionadas con las matemáticas. Está dividida en varias secciones, que incluyen álgebra, geometría, gráficos 3D, probabilidad y una parte de

preprogramación que permite tratar con ecuaciones y hojas de cálculo. Toda la ejecución puede realizarse en la página web sin necesidad de instalar ningún software especial, aunque también ofrece la posibilidad de descarga de un programa de escritorio (Windows, Mac OS X, Linux), dispositivos móviles (Android) o tablets (iOS, Android o Windows) para un uso *off line*.

Niveles de pensamiento

Pensamiento Numérico

(https://matemaye.wordpress.com/que-es-2/, 2014) Se refieren a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones junto con la habilidad y la inclinación de usar esta comprensión en formas flexibles para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias útiles al manejar números y las operaciones. El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, y se manifiestan de diversas maneras de acuerdo con el desarrollo del pensamiento matemático. Es fundamental la manera como los estudiantes escogen, desarrollan y usan métodos de cálculo, incluyendo cálculo escrito, cálculo mental, calculadoras y estimación.

Pensamiento Variacional. (Vasco, s.f.)

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

Pensamiento Espacial.

(Arboleda, 2011) El pensamiento espacial es esencial para el método científico, ya que es usado para representar y manipular información en el aprendizaje y en la resolución de problemas. El manejo de información espacial para resolver problemas de ubicación, orientación y distribución de espacios es peculiar para personas que tienen desarrollada su inteligencia espacial. Se estima que la mayoría de las profesiones científicas y técnicas requieren personas que tengan un alto desarrollo de inteligencia espacial. En la actualidad se reconocen dos líneas de trabajo del docente en el campo espacial. Una de estas líneas es la organización y estructuración del espacio (desarrollo del pensamiento espacial), otra dirección es la formación en las nociones geométricas (desarrollo del pensamiento geométrico).

Jerome Bruner (Mimenza, s.f.)

Para Jerome Bruner y para el resto de las teorías de índole cognitivista, uno de los elementos principales a la hora de conocer es la participación activa del sujeto que aprende. Es decir, no se trata de que el individuo simplemente tome información del exterior, sino que esta debe ser procesada, trabajada y dotada de sentido por el sujeto para que se transforme en conocimiento.

Según la teoría cognitiva de Bruner, en el proceso de conocer y aprender el ser humano intenta categorizar los sucesos y elementos de la realidad en conjuntos de ítems equivalentes. Así, experimentamos las vivencias y la realidad percibida creando conceptos a partir de la discriminación de los diferentes estímulos. En este proceso, denominado categorización, la información recibida del exterior es trabajada de forma activa, siendo codificada y clasificada con una serie de etiquetas o categorías con el fin de posibilitar la comprensión de la realidad. Esta categorización permite la formación de conceptos y la capacidad de hacer predicciones y tomar decisiones. Es un modelo explicativo muy influido por las ciencias de la computación, que se basan en el funcionamiento de los ordenadores de la época.

Desde la perspectiva cognitiva de Bruner, a partir de la categorización, somos capaces de generar conocimiento. Estas categorizaciones no permanecerán siempre estables y cerradas, sino que irán variando a partir de la experiencia vital, modificándose y expandiéndose. A la hora de enfrentarse a una realidad que categorizar, el individuo puede establecer dos tipos de procesos, el *Concept Formation* o el conocido como *Concept Attainment*.

¿CON QUÉ MATERIALES SE EJECUTÓ EL PROYECTO?

Para la ejecución de este proyecto se utilizaron dos clases de materiales: a) los materiales manipulativos matemáticos tales como regla, lápiz, papel, calculadora, entre otros; b) el software GeoGebra y c) herramientas ofimáticas tales como: Word, Power Point y PDF. Para la realización de la segunda parte se hizo uso del laboratorio de matemáticas de la Universidad Autónoma de Occidente, el cual consta de 17 computadores cada uno de ellos cuenta con conexión a internet y el software GeoGebra entre otros.

GeoGebra es un software de matemáticas para todo nivel educativo, fue creado por Markus Hohenwarter como trabajo final de su maestría en la universidad de Salzburgo (Austria), este software reúne la geometría, álgebra, cálculo y estadística. Gracias a este software el docente puede crear y producir cualquier tipo de problema en este caso aplicaciones de las funciones.

¿QUÉ RESULTADOS OBTUVIERON?

Para describir los resultados obtenidos, tenemos en cuenta que la hoja de trabajo se realizó en dos fases, la primera parte relacionada con los pre-saberes y la segunda parte con la solución del problema propuesto. Mostramos a continuación los resultados obtenidos en cada una de las fases.

Primera parte

En la primera fase de la actividad (pre-saberes) los estudiantes contestaron de manera individual 7 preguntas, (ver Anexo 1). Las 5 primeras preguntas las respondieron durante una sesión de clase y las dos últimas preguntas las respondieron en casa, para esta parte podían resolverlo en equipos. En esta primera parte el objetivo principal era indagar sobre sus conocimientos previos respecto a las propiedades y teoremas utilizadas para resolver triángulos rectángulos, entre estos el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas; adicionalmente, se indagó sobre la relación entre velocidad, distancia y tiempo, dado que estos eran los elementos básicos para la modelación matemática del problema propuesto, en el cual se quería hallar el tiempo mínimo necesario para que un excursionista llegara a su cabaña con algunas condiciones dadas relacionadas con su ubicación y velocidad. Las últimas dos preguntas estaban relacionadas con el cálculo de máximos y mínimos, tanto de manera analítica, como gráfica utilizando el software GeoGebra.

En la primera pregunta: ***"¿Cuáles son las características fundamentales de los triángulos rectángulos?"***, el 85% de los estudiantes describen de manera correcta lo que es un triángulo rectángulo y lo describen de manera precisa. Un 15% de los estudiantes dan características generales de los triángulos o no presentan una respuesta con una redacción clara. A continuación, el número de estudiantes que contestaron de manera correcta, parcialmente correcta, incorrecta o no contestaron.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
17	3	0

Entre las respuestas correctas tenemos:

- E9: "Se caracterizan por su ángulo interior que es recto, que mide 90°".
- E17: "Es un triángulo que tiene un ángulo de 90°, dos catetos y una hipotenusa".
- E20: "Estos tienen un ángulo interior de 90°".

Algunas respuestas parcialmente correctas o que no caracterizan a un triángulo rectángulo son:

- E10: "Es un triángulo que tiene 3 lados, base, altura e hipotenusa".
- E19: "Los lados de sus dos catetos son iguales y la hipotenusa es el lado más grande, tiene un ángulo de 90°".

Con respecto a la pregunta 2: **¿Dado un triángulo rectángulo, qué propiedades o teoremas conoces que relacionen sus lados y sus ángulos?** Se puede evidenciar que los estudiantes tienen interiorizado el teorema de Pitágoras y, además, recuerdan que las identidades trigonométricas se aplican a triángulos rectángulos, el 75% de los estudiantes responden de manera correcta. Se observa que enuncian el teorema de Pitágoras con precisión y lo introducen en la caracterización de los triángulos rectángulos, sin embargo, algunas de sus redacciones no dan cuenta del concepto matemático al que quieren referirse. El 10% de los estudiantes no respondió y el 15% de los estudiantes dieron respuestas parcialmente correctas.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
15	3	2

Quienes respondieron de manera correcta, escribieron que las propiedades que conocen de triángulos rectángulos son:

- E7: "El teorema de Pitágoras, Identidades trigonométricas".
- E10: "El teorema de Pitágoras".
- E18: "El teorema de Pitágoras, ley del seno y ley del coseno".

Otros estudiantes mencionaron propiedades que no son características de los triángulos rectángulos, por ejemplo:

- E12: "Recuerdo el teorema de Pitágoras y la regla de 3".

Por su parte uno de los estudiantes no menciona propiedades, sino que de nuevo describe características de un triángulo rectángulo:

- E19: "Su ángulo es de 90°, tiene dos catetos".

Para la pregunta 3: ***Si en un triángulo rectángulo conoces las medidas de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo, ¿cómo puedes encontrar la medida de la hipotenusa utilizando razones trigonométricas?*** Y para la pregunta 4: ***Si en un triángulo rectángulo conoces las medidas de un ángulo y el lado adyacente a ese ángulo, ¿cómo puedes encontrar la medida del cateto adyacente al ángulo utilizando razones trigonométricas?*** respectivamente, se encontró que algunos de los estudiantes utilizan bien las razones trigonométricas, enuncian de forma acertada la ecuación que se podría utilizar para encontrar el lado solicitado y en ocasiones dan ejemplos con su respectivo despeje, sin embargo, también se encontró que cuando se va a dar explicación o argumentación escrita a estas preguntas, algunos de los estudiantes presentan errores en su redacción o no tiene en cuenta la pregunta específica que se está haciendo.

Para la pregunta 3 tenemos que solamente el 15% respondieron de manera correcta, el 60% de los estudiantes dieron respuestas parcialmente correctas y el 25% no respondió o respondió de manera incorrecta.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
3	12	25

Algunas de las respuestas incorrectas son:

- E8: "La hipotenusa es = $\frac{co}{ca}$".
- E9: "Sus medidas son 90° y 180° y para encontrar la hipotenusa se calcula su cateto opuesto y adyacente".
- E16: "Se puede obtener a través de los catetos".
- Entre las respuestas correctas tenemos:
- E4: "Conociendo el ángulo y el lado opuesto a este, podemos hallar la hipotenusa con la razón trigonométrica seno ya que:

$$\sin\theta = \frac{Op}{Hip}, Hip = Op.\sin\theta\text{''}.$$

- E17: "Tengo el ángulo y opuesto, se puede encontrar con

$$\alpha = \frac{opuesto}{hipotenusa}\text{''}.$$

Para la pregunta 4 solamente el 10% de los estudiantes dio una respuesta correcta, 30% dio una respuesta parcialmente correcta y el 60% de los estudiantes dieron respuestas incorrectas.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
2	6	12

Entre las respuestas incorrectas tenemos

- E9: "Es igual a la raíz cuadrada de la hipotenusa al cuadrado menos el cateto opuesto al cuadrado".
- E15: "Coseno $\cos\theta = \frac{A}{ɦ}$".
- E18: "Con la ley del coseno".

Entre las respuestas parcialmente correctas, se encontró el caso de estudiantes que recuerdan la razón trigonométrica apropiada, pero se equivocan al momento de despejar, tenemos, por ejemplo:

- E4: "Conociendo el ángulo y el lado opuesto a este, podemos hallar el cateto adyacente con la razón trigonométrica tangente ya que:

$$\tan\theta = \frac{Op}{Ad}, \text{entonces } Ad = Op.\tan\theta\text{".}$$

Teniendo en cuenta las respuestas de las preguntas 3 y 4, encontramos que pocos estudiantes manejan de manera correcta las razones trigonométricas, algunos recuerdan las relaciones entre ángulos y lados, pero cometen errores al momento de despejar y obtener la cantidad solicitada.

Para la pregunta 5: ***"Si sabes que un objeto se mueve a velocidad constante y conoces la velocidad y la distancia recorrida, ¿cómo puedes encontrar el tiempo necesario para recorrer esa distancia con la velocidad dada?"***

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
4	7	9

El 20% de los estudiantes respondieron esta pregunta de manera correcta, 35% parcialmente correcta y el 45% no respondió o respondió de manera incorrecta. Entre los que no respondieron o respondieron de manera incorrecta tenemos las siguientes respuestas:

- E16: “Se puede calcular a través de una regla de tres”.

Algunos de los estudiantes saben que existe una expresión que relaciona la velocidad, distancia y tiempo, pero no la recuerdan. Tienen algunas respuestas como:

- E3: “usando la fórmula de tiempo. No me acuerdo bien la fórmula”.

Otros estudiantes recuerdan de manera correcta la relación, pero se equivocan al momento de despejar el tiempo:

- E9: $v = \frac{d}{t}, t = \frac{v}{t'}$

Por otra parte, entre las respuestas correctas tenemos:

- E4: “Aplicando las fórmulas de movimiento rectilíneo uniforme sabemos que

$$x = v.t, t = \frac{x}{v}\text{”.}$$

- E8: “Tiempo es igual a distancia sobre velocidad”.
- E17: “Es la razón entre distancia y velocidad. Ejemplo $\frac{7\,m}{10\,m/s}$”.

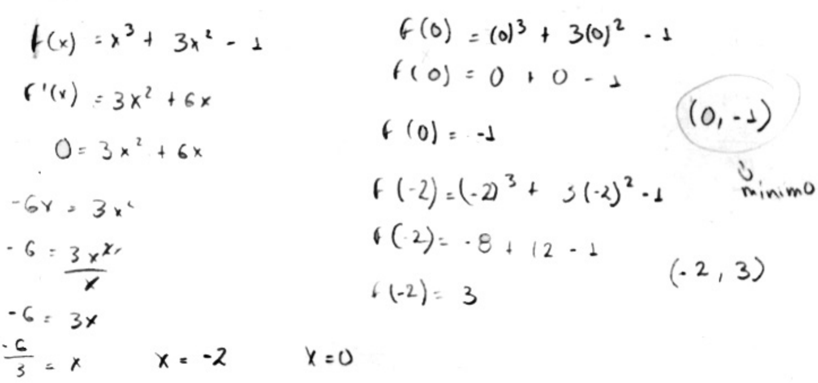
Se evidencia que algunos estudiantes tienen muy claros sus conceptos de la física y mencionan incluso que se trata de un movimiento uniforme, algunos estudiantes presentan la respuesta e incluyen ejemplos numéricos. Algunos estudiantes recuerdan las relaciones de la física, pero cometen errores al momento de despejar.

Para las preguntas 6 y 7, los estudiantes las resolvieron por fuera de la clase y podían trabajar en grupos. Para la pregunta 7: ***Dada la gráfica de una función continua ¿cómo puedes determinar el mínimo de esa función en un intervalo dado? Presenta un ejemplo gráfico usando GeoGebra.***

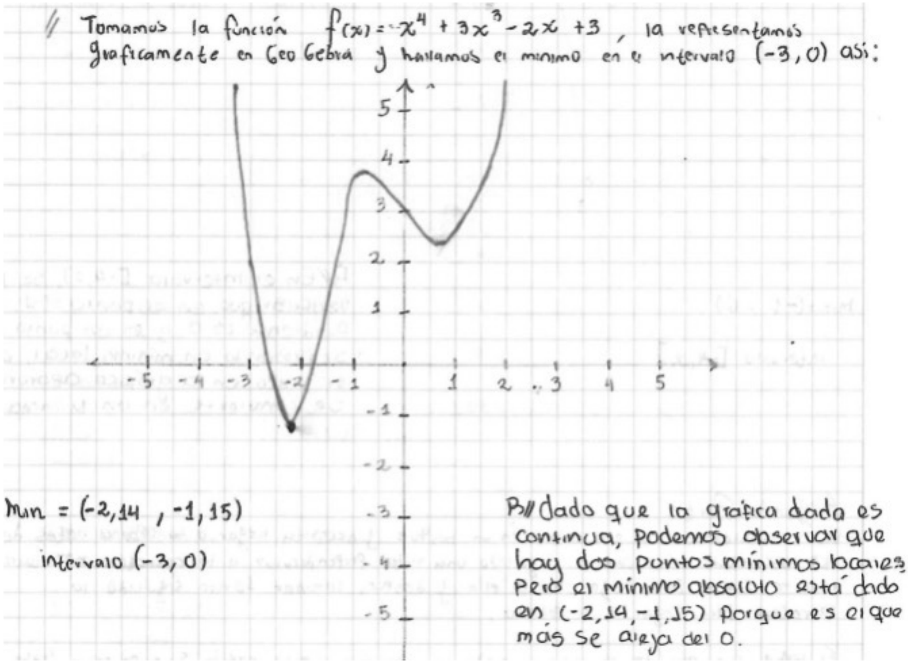
CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
13	6	1

Se observa en esta pregunta que la mayoría de los estudiantes responden de manera correcta, (65%). Solamente el 5% no respondió y 30% responde de manera parcialmente correcta. En las soluciones se observa que, aunque se pedía resolver el problema utilizando la herramienta GeoGebra, algunos estudiantes lo hacen de manera analítica, aunque su respuesta es correcta, lo resuelven sin usar la herramienta computacional como lo sugiere la actividad. Entre las respuestas tenemos:

- E20: “Se puede determinar el mínimo absoluto de una función en un intervalo dado, haciendo la derivación de la función posteriormente igualarla a (0) y obtener los puntos críticos, para después continuar reemplazando las en la ecuación y obtener el menor resultado”.

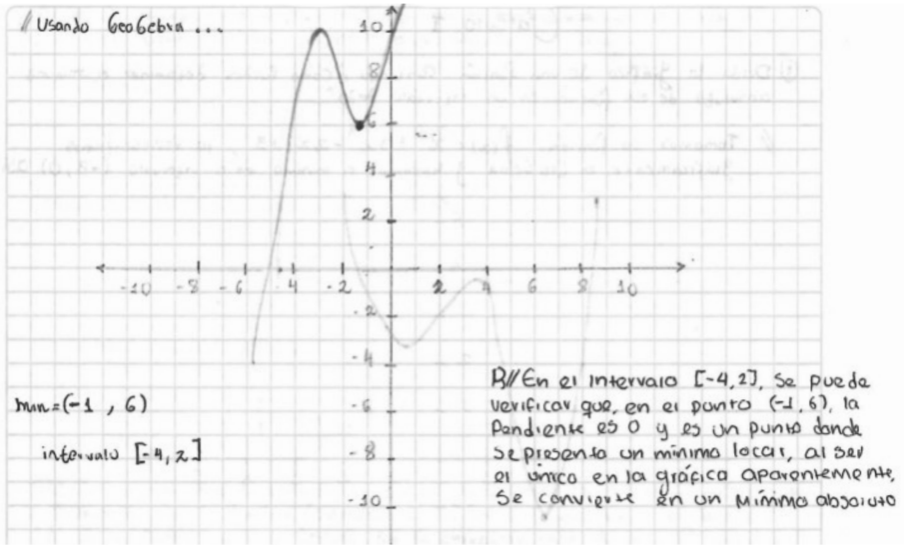


También se evidenció que la mayoría de los estudiantes utilizaron de forma correcta la herramienta, así por ejemplo los estudiantes E4 y E16 afirman que: “tomamos la función y la representamos gráficamente en GeoGebra”; sin embargo, escriben su respuesta usando lápiz y papel. A pesar de que están buscando el mínimo en el intervalo afirman que hay dos mínimos locales, es decir, consideran el que se encuentra por fuera del intervalo dado, pero reconocen de manera correcta el mínimo absoluto y aunque GeoGebra les ha dado la respuesta, ellos argumentan que es el mínimo absoluto “porque es el que más se aleja del 0”.



Para la pregunta 7: ***"Dada la expresión matemática de una función, es decir, si tienes la función ¿cómo puedes encontrar el valor mínimo de la función dada? Por ejemplo, encuentra el valor mínimo de la función*** $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^3 + 6\mathcal{X}^2 + 9\mathcal{X} + 10$ ***en el intervalo [-4,2].*** En esta pregunta no se especificaba el método de solución, así que entre las respuestas encontramos estudiantes que presentaron su respuesta usando GeoGebra y otros indicaron la solución analítica al problema de hallar el mínimo absoluto en un intervalo cerrado.

Para los estudiantes E3 y E13 afirman que lo resuelven usando GeoGebra, sin embargo, escriben su respuesta usando papel y lápiz. Aunque la respuesta es correcta, la justificación no es correcta. Afirman que "En el intervalo [-4,2] se puede verificar que en el punto (-1,6) la pendiente es 0 y es un punto donde se presenta un mínimo local, al ser el único en la gráfica aparentemente se convierte en un mínimo absoluto." De acuerdo a su justificación, utilizan la herramienta para visualizar la gráfica de la función, pero no utilizan el comando para obtener el mínimo absoluto, lo obtienen a partir de la visualización de la gráfica.



Segunda parte

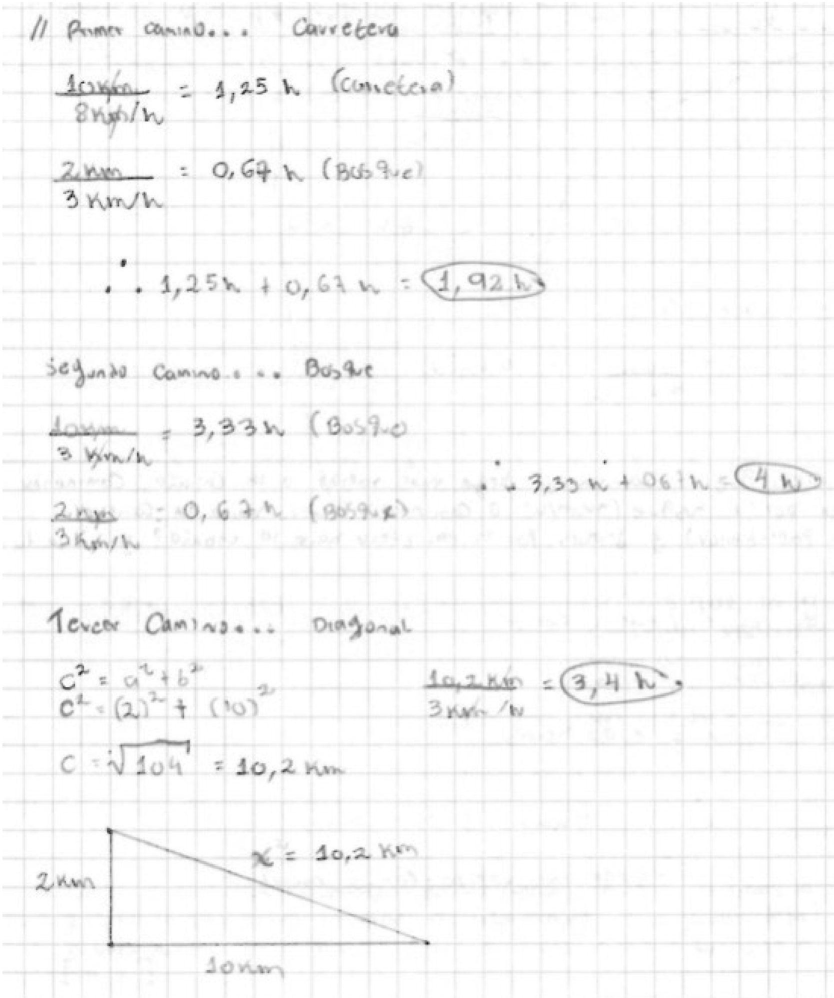
En esta segunda parte encontramos que los estudiantes resolvieron el problema propuesto, pudieron modelar el problema mediante una expresión matemática utilizando las razones trigonométricas y el concepto de velocidad. A diferencia de la primera parte, no se trabajó de forma individual sino los estudiantes se organizaron en grupos de 3 o 4 estudiantes con lo que se formaron 7 grupos de trabajo.

En la primera pregunta: "***plantea algunos caminos posibles para llegar a la cabaña. En cada caso calcula el tiempo necesario para llegar. Compara el tiempo que tardaría en llegar a la cabaña por cada uno de los caminos propuestos".*** Las siguientes fueron los planteamientos de los grupos:

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
4	2	1

El 57% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta, 29% parcialmente correcta y el 14% no respondió o respondió de manera incorrecta. Entre los que respondieron de manera correcta tenemos las siguientes:

- Respuesta correcta G1:



// Primer camino... Carretera

$\frac{10km}{8km/h} = 1{,}25\ h$ (carretera)

$\frac{2km}{3km/h} = 0{,}67\ h$ (bosque)

$\therefore 1{,}25h + 0{,}67\ h = 1{,}92\ h$

Segundo camino... Bosque

$\frac{10km}{3km/h} = 3{,}33\ h$ (bosque)

$\frac{2km}{3km/h} = 0{,}67\ h$ (bosque)

$\therefore 3{,}33\ h + 0{,}67\ h = 4\ h$

Tercer camino... Diagonal

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (2)^2 + (10)^2$

$c = \sqrt{104} = 10{,}2\ Km$

$\frac{10{,}2\ Km}{3km/h} = 3{,}4\ h$

El grupo halló el tiempo que tarda un excursionista por tres caminos diferentes, uno en línea recta (por el bosque) utilizando la hipotenusa del triángulo rectángulo, otro por dos líneas rectas ambas por el bosque y un tercero de manera perpendicular a la carretera, combinado con la misma carretera. Se pudo observar que en este caso el más corto fue el que combinó bosque con la carretera.

- Respuesta parcialmente correcta G7: Los estudiantes consideraron un solo camino, por lo tanto, no pudieron realizar ninguna comparación.

$t = d/V$

a) $t = 2\ Km / 3\ Km/h = 0.66h$

b) $t = 10\ km / 8\ Km/h = 1.25\ h$

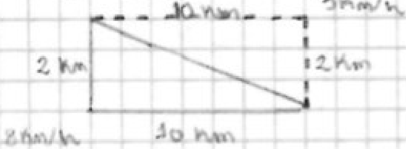
Tiempo total = 1,91 h

Para la pregunta 2: ***Si el excursionista camina solamente por el bosque, a una velocidad de 3km/h ¿cuánto tiempo tardaría en llegar a la cabaña?*** Todos los grupos la contestaron de manera correcta, algunos con mejor redacción y explicación, pero todos llegaron a la solución. El 72% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta y el 14% parcialmente correcto y el 14% no respondió o respondió de manera incorrecta.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
5	1	1

- Entre los que respondieron de manera correcta tenemos al grupo G1:

// Tenemos que...



$\frac{10\ km}{3\ km/h} = 3,33\ h$ (Bosque)

$\frac{2\ km}{3\ km/h} = 0,67\ h$ (Bosque)

Entonces = 3,33 h + 0,67 h = 4 h (Bosque)

O también verse así:

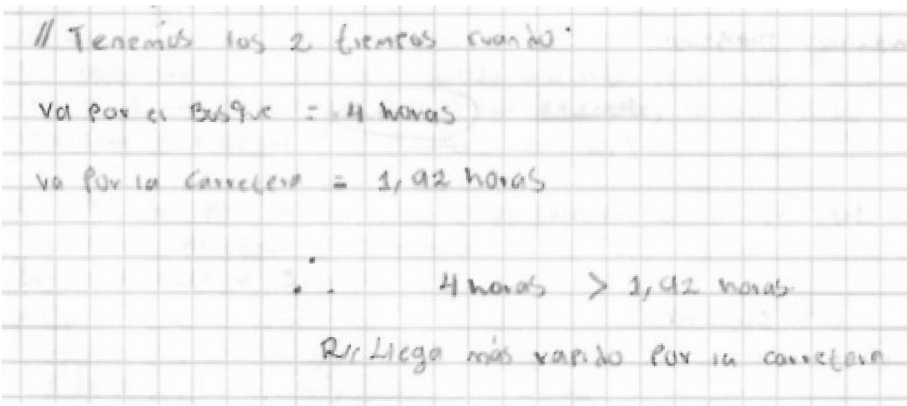
$2\ km + 10\ km = \frac{12\ km}{3\ km/h} = 4$ horas

En la pregunta 3 se pide comparar el tiempo necesario para llegar a la cabaña utilizando dos caminos ***"¿Cómo crees que el excursionista llega más rápido a la cabaña; caminando solamente por el bosque (3km/h) o caminando primero hacia la carretera y después por la carretera hacia la cabaña? Justifica claramente tu respuesta"***. De nuevo la solución es correcta, aunque algunos grupos encuentran el tiempo necesario por cada uno de los caminos, dieron la respuesta indicando cuánto se tardaba en cada camino, pero no respondieron de manera explícita la pregunta dada, esto indica que el análisis de la función es correcto, pero no están pendientes de aspectos específicos de la situación planteada, en otros casos se encontraron equipos que llegaban a la solución, pero no mostraron los procesos para llegar a la misma.

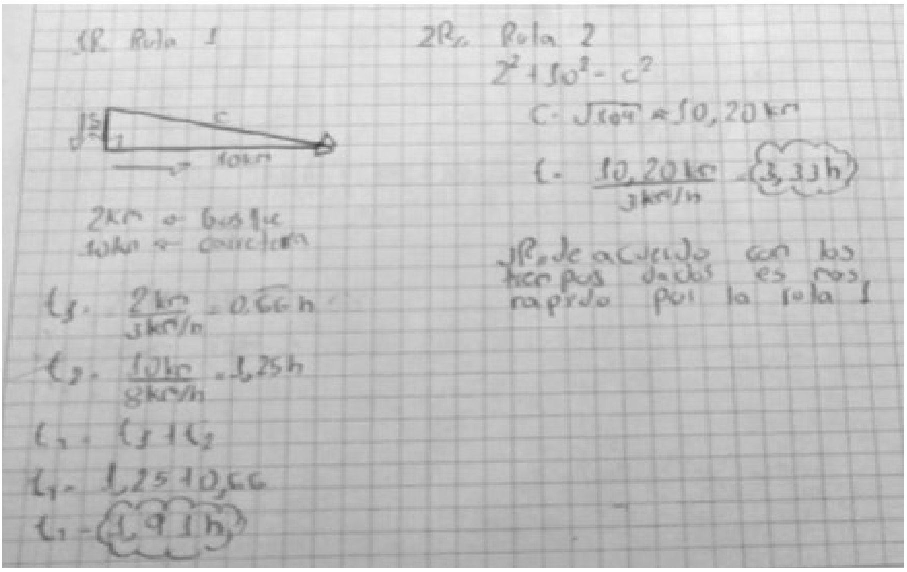
CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
5	1	1

El 72% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta, el 14% parcialmente correcto y el 14% no respondió o respondió de manera incorrecta. Algunas de las respuestas dadas son:

- Respuesta correcta G1:


// Tenemos los 2 tiempos cuando:
Va por el Bosque = 4 horas
va por la carretera = 1,92 horas
∴ 4 horas > 1,92 horas
R/: Llego más rapido por la carretera

Respuesta correcta G7:



De acuerdo con los tiempos dados es más rápido la ruta número 1 (cruzar 2km de bosque y 10 km de carretera) para llegar a la cabaña.

En la pregunta 4: ***Organiza los datos obtenidos en una tabla utilizando Hoja de cálculo. Relaciona en la tabla el valor del ángulo con el tiempo total necesario para llegar a la cabaña***. Se evidencia que todos los grupos manejan de manera correcta la hoja de cálculo y solo un grupo no realizó el análisis correspondiente.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
6	1	0

El 86% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta y el 14% respondió de manera parcialmente correcta. Entre las respuestas dadas tenemos las siguientes:

- Respuesta G7: “A continuación, se presentará la tabla en la cual se evidencia el Angulo teta en radianes y el tiempo en diferentes momentos”.

ÁNGULO	TIEMPO
1.185987050024904 rad	186.801.660.178.577
1.56579638646094 rad	191.542.499.994.792
0.782904402980860 rad	194.391.900.311.238
0.462649605340132 rad	224.244.415.283.793
0.321251303314807 rad	261.009.764.756.752
0.244684891102413 rad	300.072.101.082.923
0.197395559849881 rad	339.934.634.239.519

Este grupo propone una respuesta, maneja de forma adecuada la vista hoja de cálculo de GeoGebra, pero no toma el tiempo en segundos tal como lo da el recurso.

- Respuesta correcta G3: “En la siguiente tabla se evidencia la relación entre ángulo, tiempo y distancia, también se resalta el ángulo para el cual se recorrió menos distancia y tiempo”.

ÁNGULO	TIEMPO	DISTANCIA A
0,1974	3,3993	10,0
0,2011	3,3610	9,8
0,2054	3,3187	9,6
0,2096	3,2785	9,4
0,245	2,9987	8
0,3218	2,6082	6
0,3805	2,4201	5
0,436	2,2407	4
0,588	2,0769	3
0,8961	1,9037	1,6
1,1071	1,8704	1
1,186	1,868	0,8
1,5658	1,9154	0,01

Para los puntos 5 y 6 se pide hallar el tiempo mínimo utilizando el recurso GeoGebra. Para dar solución a estos puntos cada grupo debe hacer uso de la herramienta GeoGebra, mover el deslizador, tener en cuenta los datos de la hoja de cálculo https://www.geogebra.org/m/m9pchdbx, realizar la gráfica y además tener en cuenta los resultados y respuestas encontrados en los puntos anteriores para realizar comparaciones y encontrar el tiempo solicitado en el planteamiento inicial.

En la pregunta 5: ***De acuerdo con tus observaciones del punto anterior. ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para llegar a la cabaña, siguiendo la ruta descrita? ¿En qué dirección debería caminar el excursionista para llegar más rápido a la cabaña?*** En esta pregunta se encontró que el 57% de los grupos respondió esta pregunta de manera correcta y el 43% respondió de manera parcialmente correcta.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
4	3	0

Entre las respuestas de los grupos tenemos las siguientes:

- Respuesta G7: "se demora 1,86 horas, cuando el Angulo teta equivale a 67,952 grados, además en esa ruta es en el menor tiempo en el que la persona llega a la cabaña".
- Respuesta G3: "El tiempo mínimo necesario para llegar a la cabaña siguiendo la ruta descrita es 1,868 h, y la dirección en la que debe caminar es 1,186 rad".

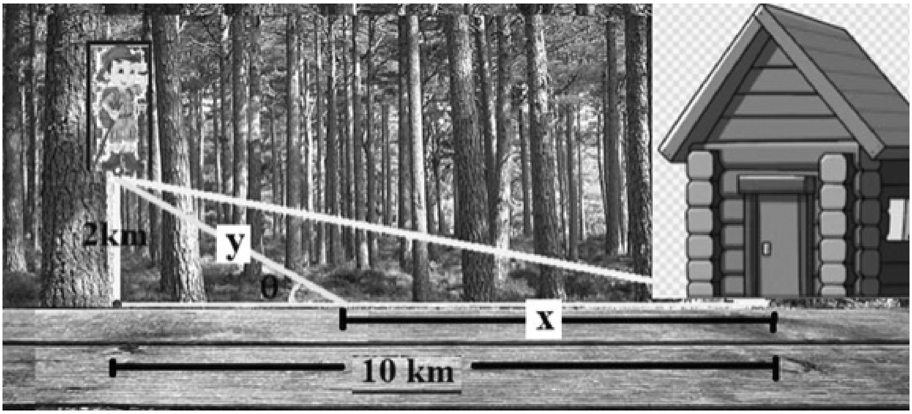
En la pregunta 6: ***Compara los resultados obtenidos en (2) y (3) con el tiempo mínimo necesario para llegar a la cabaña obtenido en (6) ¿Concuerda este resultado con tu hipótesis en el punto (3)? Explica tu respuesta***. En esta pregunta se encontró 43% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta y el 57% respondió de manera parcialmente correcta.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
3	4	0

A continuación, una de las respuestas correctas presentada por el G3: "El tiempo obtenido en 2 y en 3 es respectivamente 3,4 h y 1,91 h, a diferencia del resultado obtenido anteriormente (1,868 h) que, aunque es similar, no es igual, pues no se hizo el análisis de cada uno de los caminos posibles, solo de algunos, obteniendo un margen de error de 0,042 h".

Respuesta parcialmente correcta por G1: "El camino en el que el excursionista llega en menor tiempo a la cabaña es de 1.868 horas; el camino de manera diagonal que toma la persona es de 3.4 horas y, finalmente, el camino en el que más demora tomando el bosque es de manera perpendicular a la tomada en la carretera, por lo que demora 4 horas, por ende, el tiempo mínimo al llegar es de 1.868 horas con una dirección de 0.6927 rad."

En la pregunta 7: ***Vamos ahora a construir una función que modele la situación planteada, es decir, queremos encontrar el tiempo total necesario para llegar a la cabaña en función del ángulo teta, para eso sigue los pasos dados a continuación:***



a. Sea la distancia recorrida por el excursionista caminando por el bosque, encuentre una expresión para en términos del ángulo .

b. Sea distancia recorrida por el excursionista caminando por la carretera, encuentre una expresión para en términos del ángulo

c. Sabiendo que por el bosque puede caminar a una velocidad de 3 km/h, encuentre una función para expresar el tiempo necesario para recorrer la distancia en términos del ángulo

d. Sabiendo que por la carretera puede caminar a una velocidad de 8 km/h, encuentre una función para expresar el tiempo necesario para recorrer la distancia en términos del ángulo

e. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto C y D, escriba una función que represente el tiempo total que necesita el excursionista para llegar a la cabaña siguiendo la ruta descrita.

En esta pregunta se pide construir una función que modele la situación planteada, aquí se observa que 6 de los 7 grupos llegaron a la respuesta correcta respondiendo cada una de las preguntas dadas y teniendo en cuenta los conceptos que se habían revisado en la primera parte del trabajo correspondiente a pre-saberes. Veamos:

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
6	1	0

El 86% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta y el 14% respondió de manera parcialmente correcta ya que no justificaron cada uno de los pasos para llegar a la solución, solamente presentan el resultado (función que modela la situación) pero no muestran la manera de llegar a ese resultado.

En la solución de esta pregunta se observa que los grupos que responden de manera correcta, aunque muestran el paso a paso que se solicitaba, solo presentan expresiones matemáticas, no lo explican ni justifican de manera adecuada. Entre las respuestas dadas tenemos las siguientes:

- Respuesta G1:

a.

$$\mathrm{Sen}\theta = \frac{2km}{y}$$

$$\mathrm{Y.\ Sen}\theta = 2km$$

$$\mathrm{Y} = \frac{2km}{\mathrm{Sen}\theta}$$

b.

$$\mathrm{Tan}\theta = \frac{2}{10-x}$$

$$10-x = \frac{2}{\mathrm{Tan}\theta}$$

$$-x = -10 + \frac{2}{\mathrm{Tan}\theta}$$

$$x = -\frac{2}{\mathrm{Tan}\theta} + 10$$

c. Velocidad Bosque = 3Km/h

$$t = \frac{x}{\mathrm{V}}$$

$$t1 = \frac{y}{3km/h}\ ;\ t1 = \frac{\frac{2km}{\mathrm{Sen}\theta}}{3km/h}$$

d. Velocidad Carretera = 8Km/h

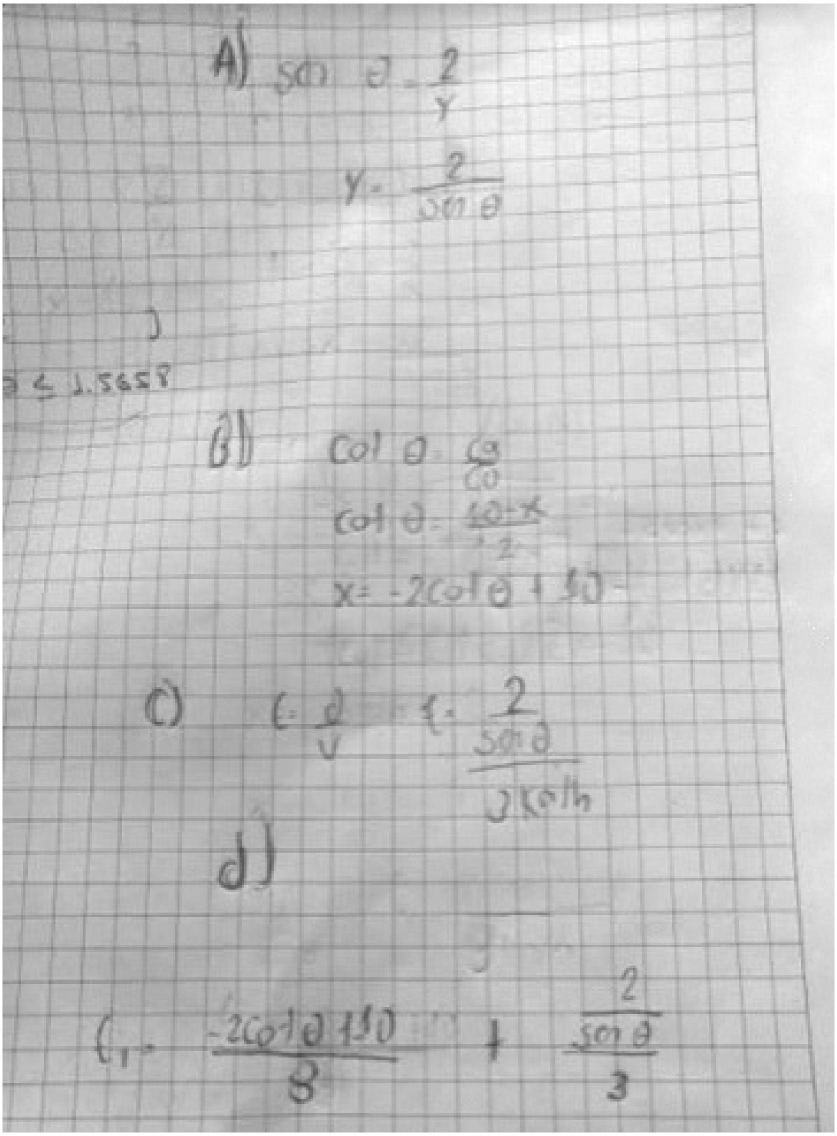
$$t2 = \frac{x}{8km/h}\ ;\ t1 = \frac{-\frac{2km}{\mathrm{Tan}\theta} + 10}{8km/h}$$

e. Tiempo total = $\mathrm{Ttotal} = t1 + t2$

$$\mathrm{Ttotal} = \frac{\frac{2}{\mathrm{Sen}\theta}}{3} + \frac{-\frac{2}{\mathrm{Tan}\theta} + 10}{8}$$

- Respuesta correcta, pero sin justificación paso a paso – G5

$$\mathrm{f(t)} = \frac{\frac{2}{\mathrm{Sen(t)}}}{3} + \frac{-\frac{2}{\mathrm{Tg(t)}} + 10}{8}$$

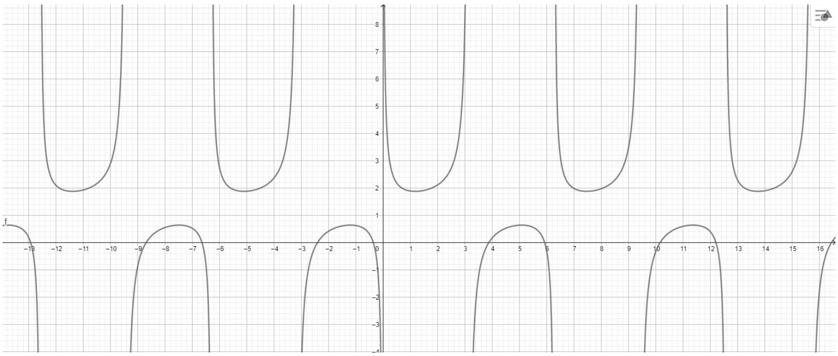


En las preguntas 8, 9 y 10 se pide graficar la función obtenida y encontrar el mínimo con ayuda de GeoGebra.

En la pregunta 8: ***Grafica la función obtenida en el punto anterior.*** Se encontró que 86% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta y el 14% no respondió o respondió de manera incorrecta.

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
6	0	1

Algunas de las gráficas presentadas por los estudiantes fueron:
Gráfica G5



Los 6 grupos que respondieron la pregunta presentaron una buena gráfica, la diferencia entre las respuestas es que algunos le hacían mayor o menor zoom a la gráfica presentada. En la pregunta 9: ***Analiza la gráfica obtenida para valores del ángulo tera en el intervalo de 0.1974 a 1.5658. ¿Por qué crees que debemos considerar solamente estos valores de teta?***

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
3	3	1

El 43% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta, el 43% respondió de manera parcialmente correcta y el 14% respondió de manera incorrecta. Presentamos a continuación algunas de las respuestas:

- Respuesta correcta G1: "Debemos evaluar en este intervalo ya que estos son los 2 extremos del recorrido en función del ángulo".
- Respuesta correcta G3: "Creemos que se debe considerar los valores de θ porque este representa el ángulo de cada uno de los posibles caminos y direcciones que puede tomar el excursionista para llegar a la cabaña".

- Respuesta incorrecta G7: "Debemos considerar estos puntos por que entre estos se encuentra el tiempo en el cual la persona se demora menos en llegar a la cabaña".

En la pregunta 10: ***Observando la gráfica obtenida, ¿cuál es el valor mínimo de la función? Para obtenerlo puedes utilizar la siguiente función de GeoGebra:***

Mínimo [<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>]

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
4	2	1

El 57% de los grupos respondieron esta pregunta de manera correcta, el 29% respondió de manera parcialmente correcta y el 14% no respondió la pregunta. Presentamos a continuación algunas de las respuestas:

- Respuesta G7: "El mínimo corresponde a 1.86 es decir el tiempo más corto en el que la persona llega a la cabaña".
- Respuesta G4: "Se halló como resultado en GeoGebra analizando la gráfica 1,863 su valor mínimo". Aunque la respuesta es correcta no hay una buena redacción de la misma.
- Respuesta G2: "el valor mínimo de la función es (1.19,1.87)". Este grupo presenta el valor numérico de manera correcta pero no da ninguna explicación ni justificación de la misma, adjuntan una captura de pantalla de la solución dada por GeoGebra:

  R/ el valor mínimo de la función es (1.19, 1.87)

$$f(t) = \frac{\frac{2}{\mathrm{Sen}(t)}}{3} + \frac{-\frac{2}{\mathrm{Tg}(t)} + 10}{8}$$

a: $0.2 \leq t \leq 1.57$

A = Mínimo (f (t), 0.81, 1.86)
→ (1.19, 1.87)

En la pregunta 11: ***Escribe una conclusión en la que compares los procesos algebraicos vs la utilización de la herramienta GeoGebra al resolver el problema planteado***:

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
3	3	1

El 14% de los grupos no respondió la pregunta, el 43% respondió de manera equivocada, es decir, no compararon los métodos, sino que formularon una conclusión sobre el problema resuelto indicando cómo lo hicieron y cuál era la ruta que se debía seguir para llegar más rápido a la cabaña. El 43% de los estudiantes si hicieron una comparación entre la solución algebraica y la utilización de la herramienta computacional, entre sus respuestas tenemos:

- Respuesta G1: "Al utilizar los procesos algebraicos podemos observar cómo obtuvimos un resultado muy similar al arrojado por GeoGebra por ejemplo, algebraicamente obtuvimos el valor mínimo del ángulo (1.868) y con respecto a la utilización del programa GeoGebra obtuvimos otro valor mucho más certero en la medición del ángulo (1.863), en conclusión obtuvimos la coordenada en donde se encuentra el punto".
- Respuesta G13: "En conclusión, podemos decir que la relación entre el proceso algebraico y el proceso en GeoGebra se complementan, porque inicialmente se realiza el proceso algebraico para así modelar la función que será ingresada en GeoGebra, donde el programa automáticamente simplifica la modelación de la función y por ello evita el proceso de hallar los puntos críticos. Es decir, GeoGebra, es una herramienta de ayuda eficaz que complementa el proceso algebraico realizado anteriormente por los estudiantes".
- Respuesta G7: "El uso de conocimientos empleados en operaciones algebraicas y en la herramienta de GeoGebra nos facilitó el proceso del trabajo, de esta manera pudimos resolver cada punto del ejercicio, realizando operaciones para hallar funciones y en el software graficarlo para observar la función y también para conocer los intervalos, mínimos absolutos, máximos absolutos, etc., de esta

manera se concluye que no es un VS entre este si no un complemento de las mismas para lograr el mismo medio".

En la pregunta 12: ***Socialización: Muestra el paso a paso del trabajo realizado por medio de un video, fotos organizadas en un archivo PDF, una presentación, etc.***

CORRECTO	PARC CORRECTO	INCORRECTO
4	0	3

El 57% de los estudiantes respondieron esta pregunta compartiendo imágenes o videos de la realización de su trabajo, el 43% no lo hicieron. Entre las imágenes presentadas por los estudiantes tenemos:

¿CUÁLES SON LAS LECCIONES APRENDIDAS?

En la realización de la actividad se pudo evidenciar que los estudiantes lograron hallar una función que describía el tiempo necesario para llegar a la cabaña, utilizando sus conceptos previos de física (relación velocidad, distancia y tiempo) además del conocimiento previo de las razones trigonométricas, teniendo como base los triángulos rectángulos que se derivan de la situación problema planteada. Después de encontrar el modelo matemático que describía la situación, lograron utilizar el programa GeoGebra para graficar la función obtenida, encontrar el mínimo de dicha función y obtener sus propias conclusiones.

En la primera parte se evidenció que la mayoría de los estudiantes conocen el teorema de Pitágoras y lo consideran como algo característico de los triángulos rectángulos. Muchos de los estudiantes reconocen y utilizan bien las razones trigonométricas.

En la segunda parte se evidenció que todos los estudiantes resolvieron el problema propuesto, logrando modelar el problema mediante una expresión matemática utilizando las razones trigonométricas y el concepto de velocidad. También se observó que utilizaron de manera correcta el programa GeoGebra logrando así obtener el mínimo de la función planteada. Los estudiantes participaron de forma activa durante todo el proceso de construcción de este conocimiento. Desarrollaron actividades que les permitió hallar el tiempo necesario para recorrer una distancia conociendo la velocidad, interpretar tablas, calcular e interpretar las razones trigonométricas y obtener el valor mínimo de una función. La organización intencionada de este tipo de actividades motiva a los estudiantes y les permite establecer roles más participativos y proactivos en el proceso de aprendizaje del cálculo. Adicionalmente contribuye a desarrollar las competencias de modelación, comunicación, argumentación y resolución de problemas.

REFERENCIAS

Arboleda, A. A. (8 de octubre de 2011). *Desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico en el aprendizaje de los sólidos regulares mediante el modelo de Van Hiele, con los estudiantes de 6 grado del colegio San José de la comunidad marista*. http://funes.uniandes.edu.co/2620/1/AlonsoDesarrolloAsocolme2011.pdf

Argumentación matemática: prácticas escritas e interpretaciones. (Junio de 2010). *Suma+*. https://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/suma_2010.pdf

Espeso, P. (22 de abril de 2016). GeoGebra, una práctica herramienta para aprender matemáticas. *Educación 3.0*. https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/herramienta-aprender-matematicas/#:~:text=Disponible%20a%20trav%C3%A9s%20de%20la,ecuaciones%20y%20hojas%20de%20c%C3%A1lculo

Estándares básicos de competencias en matemáticas. (s.f.). *Ministerio de Educación Nacional*. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Martínez, J. (2002): *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Ediciones Praxis.

Mimenza, O. C. (17 de noviembre de 2016). La teoría cognitiva de Jerome Bruner. *Psicología y mente*. https://psicologiaymente.com/psicologia/teoria-cognitiva-jerome-bruner

Pensamiento numérico. (Mayo de 2014). https://matemaye.wordpress.com/que-es-2/

Romo, A. (2015). Las técnicas autoinstruccionales y de solución de problemas. *Slide Player*. https://slideplayer.es/slide/1071549/.

Vasco, C. E. (s.f.). *http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf*

Villa, J. A., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A. & Ocampo, D. (s.f.). *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos.* http://funes.uniandes.edu.co/936/1/4Cursos.pdf

ANEXOS

ANEXO —— 1
Hoja de trabajo

Universidad Autónoma de Occidente
Cálculo 1
Análisis de funciones mediante una situación problema

Competencia: Analiza magnitudes, estableciendo relaciones entre ellas, modelando su relación a través de una función, encuentra el mínimo de la función obtenida mediante el uso de GeoGebra y aplica conocimientos del cálculo diferencial.

PRIMERA PARTE - PRESABERES

Contesta cada una de las preguntas dadas, de ser posible realiza un gráfico que describa la situación planteada.

1. ¿Cuáles son las características fundamentales de los triángulos rectángulos?
2. Dado un triángulo rectángulo, ¿qué propiedades o teoremas conoces que relacionen sus lados y sus ángulos?

3. Si en un triángulo rectángulo conoces las medidas de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo, ¿cómo puedes encontrar la medida de la hipotenusa utilizando razones trigonométricas?
4. Si en un triángulo rectángulo conoces las medidas de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo, ¿cómo puedes encontrar la medida del cateto adyacente al ángulo utilizando razones trigonométricas?
5. Si sabes que un objeto se mueve a velocidad constante y conoces la velocidad y la distancia recorrida, ¿cómo puedes encontrar el tiempo necesario para recorrer esa distancia con la velocidad dada?
6. Dada la gráfica de una función continua ¿cómo puedes determinar el mínimo de esa función en un intervalo dado? Presenta un ejemplo gráfico usando GeoGebra. Puedes hallar el mínimo utilizando la siguiente función de GeoGebra:
7. Mínimo[<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>]
8. Dada la expresión matemática de una función, es decir, si tienes la función ¿cómo puedes encontrar el valor mínimo de la función dada?. Por ejemplo, encuentra el valor mínimo de la función $f(x)=x^3+6x^2+9x+10$ en el intervalo [-4,2].

ANEXO — 2
Hoja de trabajo

Universidad Autónoma de Occidente
Cálculo 1
Análisis de funciones mediante una situación problema

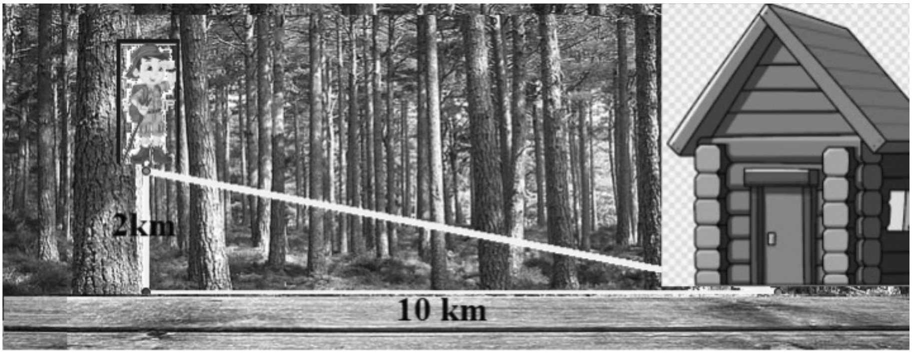
Competencia: Analiza magnitudes, estableciendo relaciones entre ellas, modelando su relación a través de una función, encuentra el mínimo de la función obtenida mediante el uso de GeoGebra y aplica conocimientos del cálculo diferencial.

SEGUNDA PARTE

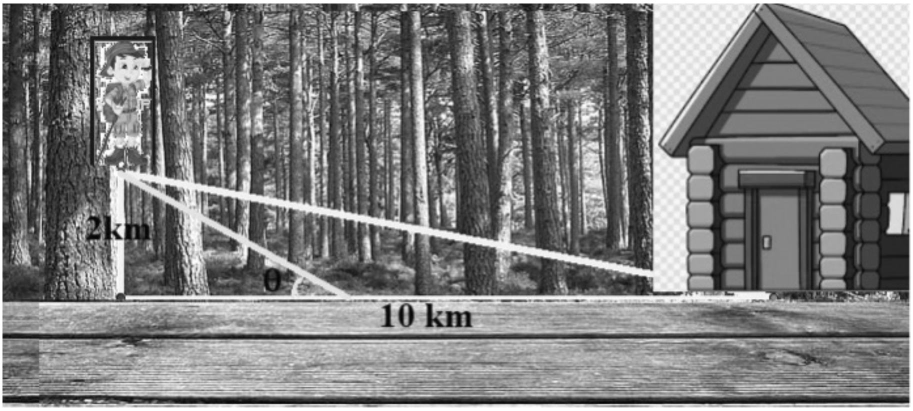
Considera la situación que se describe a continuación y responde de manera clara cada una de las preguntas formuladas:

Un excursionista se encuentra en un bosque y necesita llegar a su cabaña antes de que oscurezca. Si camina siguiendo una ruta perpendicular a la carretera necesitaría recorrer 2 km para llegar hasta ella y después caminar 10 km siguiendo la carretera para llegar a la cabaña.

Él sabe que por la carretera puede caminar más rápido, según su experiencia sabe que por la carretera puede avanzar a una velocidad de 8 km/h, mientras que por el bosque lo hace a 3km/h.



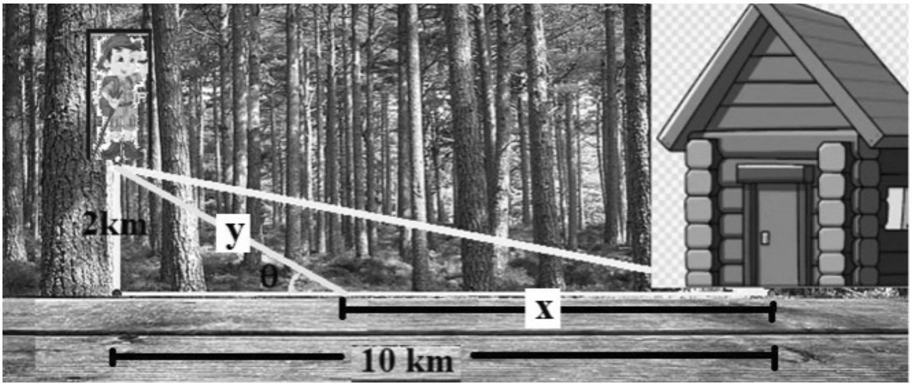
1. Plantea algunos caminos posibles para llegar a la cabaña. En cada caso calcula el tiempo necesario para llegar. Compara el tiempo que tardaría en llegar a la cabaña por cada uno de los caminos propuestos.
2. Si el excursionista camina solamente por el bosque, a una velocidad de 3km/h ¿cuánto tiempo tardaría en llegar a la cabaña?
3. ¿Cómo crees que el excursionista llega más rápido a la cabaña; caminando solamente por el bosque (3km/h) o caminando primero hacia la carretera y después por la carretera hacia la cabaña? Justifica claramente tu respuesta.
El excursionista recuerda sus conocimientos en matemáticas y decide caminar hacia la carretera de manera que su recorrido forma un ángulo con la carretera, como lo muestra la figura; y después caminar por la carretera hasta llegar a la cabaña.



Para analizar la situación, utiliza el recurso GeoGebra
https://www.geogebra.org/m/m9pchdbx

Mueva el deslizador **a**, observe el valor de la variable **TiempoTotal**, el cual corresponde al tiempo que necesitaría el excursionista para llegar a la cabaña siguiendo la ruta descrita anteriormente.

4. Organiza los datos obtenidos en una tabla utilizando la vista Hoja de cálculo. Relaciona en la tabla el valor del ángulo con el tiempo total necesario para llegar a la cabaña.
5. De acuerdo con tus observaciones del punto anterior ¿Cuál es el tiempo mínimo necesario para llegar a la cabaña siguiendo la ruta descrita? ¿En qué dirección debería caminar el excursionista para llegar más rápido a la cabaña?
6. Compara los resultados obtenidos en (2) y (3) con el tiempo mínimo necesario para llegar a la cabaña obtenido en (6) ¿Concuerda este resultado con tu hipótesis en el punto (3)? Explica tu respuesta.
7. Vamos ahora a construir una función que modele la situación planteada, es decir, queremos encontrar el tiempo total necesario para llegar a la cabaña en función del ángulo para esto sigue los pasos dados a continuación:



8. Sea y la distancia recorrida por el excursionista caminando por el bosque encuentre una expresión para y en términos del ángulo θ.
9. Sea x distancia recorrida por el excursionista caminando por la carretera, encuentre una expresión para x en términos del ángulo θ.
10. Sabiendo que por el bosque puede caminar a una velocidad de 3 km/h, encuentre una función para expresar el tiempo necesario para recorrer la distancia y en términos del ángulo θ.
11. Sabiendo que por la carretera puede caminar a una velocidad de 8 km/h, encuentre una función para expresar el tiempo necesario para recorrer la distancia x en términos del ángulo θ.
12. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el punto C y D, escriba una función que represente el tiempo total que necesita el excursionista para llegar a la cabaña siguiendo la ruta descrita.
13. Grafica la función obtenida en el punto anterior.
14. Analiza la gráfica obtenida para valores de en el intervalo ¿por qué crees que debemos considerar solamente estos valores de θ?
15. Observando la gráfica obtenida, ¿cuál es el valor mínimo de la función? Para obtenerlo puedes utilizar la siguiente función de GeoGebra: **Mínimo [<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>]**
16. Escribe una conclusión en la que compares los procesos algebraicos vs la utilización de herramienta GeoGebra al resolver el problema planteado.
17. **Socialización:** Muestra el paso a paso del trabajo realizado por medio de un video, fotos organizadas en un archivo PDF, una presentación, etc.

EXPERIENCIA 4

La resolución de problemas en contexto real con la mediación de GeoGebra

YENNI MINA MOSQUERA
SANDRA LORENA CHAVARRIA

RESUMEN

El presente artículo se presenta como resultado de dos proyectos de investigación comparativos, uno en el nivel de la media vocacional y otro en el nivel superior. Los proyectos tienen objetivos, enfoques teóricos, diseños metodológicos y actividades de aprendizajes similares para poder establecer comparaciones. El objetivo principal de los proyectos es documentar el impacto que tiene el uso sistemático de la tecnología computacional en la resolución de problemas en contexto real con la mediación de GeoGebra. Los resultados obtenidos muestran que las hojas de trabajo diseñadas en contexto real y el uso de tecnología computacional involucraron a los estudiantes en la resolución de un problema que demandó una participación más activa de parte de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. El ambiente de aula que se propició en la investigación ayudó a los estudiantes a interactuar con la tecnología, a medir y tomar datos, procesarlos e interpretarlos, a utilizar diversas representaciones semióticas de la función lineal, a comunicar y a argumentar ideas relativas a este objeto matemático.

INTRODUCCIÓN

El nivel en la formación de competencias matemáticas con el que los estudiantes llegan a la educación media e inician su carrera universitaria, es de constante preocupación y reflexión tanto para profesores de matemáticas como para directivos y otros actores involucrados con la educación. El desempeño académico en matemáticas se ve afectado por las carencias de habilidades, conocimientos y competencias de los estudiantes, esto exige de los profesores un compromiso responsable que permita aportar positivamente a disminuir estas carencias. Con el reto que esta problemática impone, desde la Universidad Icesi y específicamente desde el Departamento de matemáticas y estadística se han aunado esfuerzos para proponer estrategias de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que reconocen las necesidades particulares de cada estudiante, la importancia de un acompañamiento continuo y el seguimiento a su desempeño, esto involucra la construcción de actividades que favorezcan el acercamiento a conceptos matemáticos, poniendo en juego metodologías de enseñanza distintas a las tradicionales y donde se promueva el uso de las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC). Así mismo se proponen seminarios y Diplomados en beneficio de la formación de los profesores.

En este sentido, se presentará la caracterización y los resultados del análisis de una de las actividades que se desarrollaron en el marco del Diplomado de Diseño de ambientes de aprendizaje mediados por tecnologías, ofrecido por el Departamento de matemáticas de la Universidad Icesi, esta actividad se aplicó en dos instituciones, una institución educativa de carácter público y en un curso de primer semestre de la Universidad Icesi. Esta propuesta permite poner en juego estrategias y metodologías de enseñanza, se caracterizará, desde los productos de los estudiantes, qué competencias se fortalecen con este tipo de actividades y cómo los estudiantes pueden conjeturar, probar y finalmente construir conceptos matemáticos alrededor de las hojas de trabajo que se caracterizan por direccionar la actividad del estudiante hacia la exploración dirigida y preguntas que movilizan sus conocimientos.

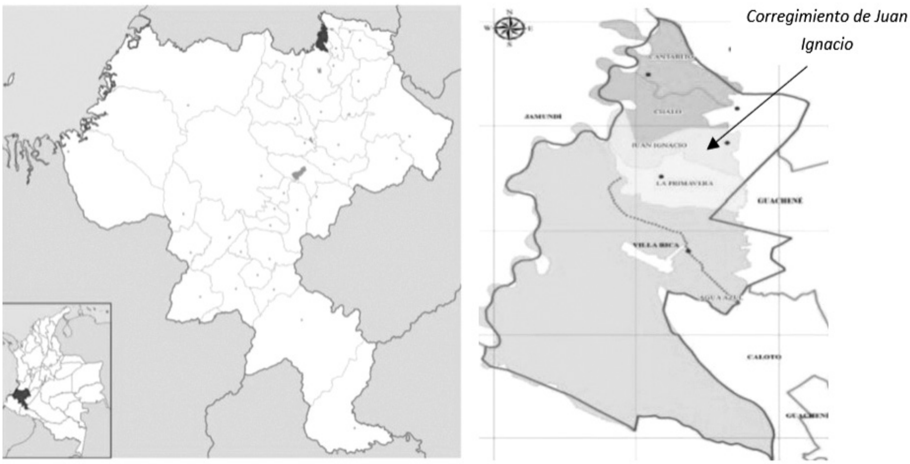
CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA POBLACIÓN

La actividad se aplicó en conjunto, tanto en un curso de primer semestre de la Universidad Icesi como en un grupo de estudiantes de grado noveno de una Institución de carácter oficial. A continuación, se describen ambas poblaciones y las instituciones de las que hacen parte:

Institución Educativa Juan Ignacio

La Institución Educativa Juan Ignacio está ubicada en la zona rural del corregimiento que lleva su mismo nombre en el municipio de Villa Rica ubicado al Norte del Departamento del Cauca.

FIGURA —— 1
Ubicación del municipio de Villa Rica



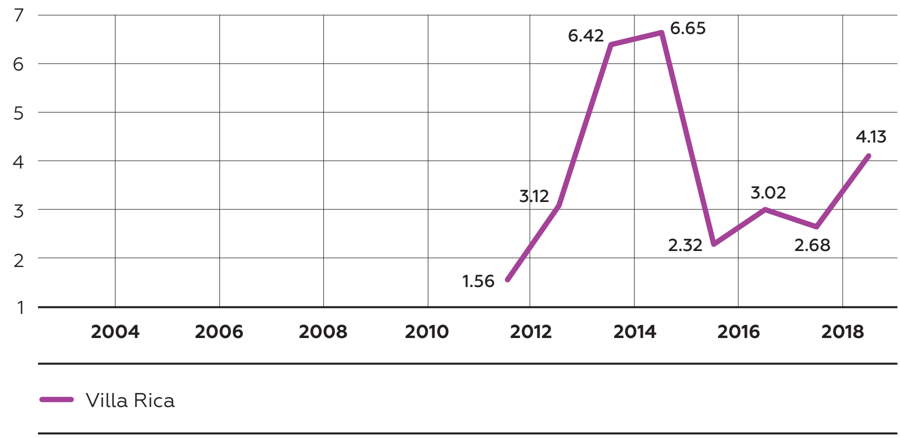
Fuente: Plan de desarrollo Municipal 2020-2023

De acuerdo con el plan de desarrollo para Villa Rica 2020-2023, este municipio hace parte de los 13 que conforman la subregión denominada Norte del departamento del Cauca, cuenta con una extensión de 74,3 kilómetros cuadrados y se ubica al sur del valle geográfico del Río Cauca. El municipio de Villa Rica se encuentra a una distancia de 36 kilómetros de la ciudad de Cali, capital del departamento del Valle del Cauca.

La población de Villa Rica es un poco más de veinte mil (20.000) habitantes, en donde el 90% son afrodescendientes, y un 10% son población mestiza, como producto de la integración de indígenas y negros inmigrantes que llegaron en la época de la esclavitud. Del total de sus habitantes, el 78,9% viven en la zona urbana, el 21,1% viven en la zona rural, siendo esta última la población afectada por la problemática del acceso a la alimentación y el aprovechamiento inapropiado del suelo debido al monocultivo de caña de azúcar. En el corregimiento de Juan Ignacio, la mayoría de sus habitantes son afrodescendientes, clasificados en estrato 1, sus habitantes viven de la agricultura y del trabajo informal, se nota una prevalencia de hogares formados por solo uno de los padres, es decir hay una marcada ausencia de uno de los padres.

Antes de caracterizar específicamente la Institución, es importante revisar algunos datos relacionados con los resultados en educación que se tienen en el municipio de Villa Rica: la cobertura en el municipio no es la misma para todos los niveles de escolaridad, la cobertura en educación media es de 42,8%, educación básica es de 79,4% y educación primaria del 77%. Así mismo, de acuerdo con Gómez (2020), la tasa de deserción interanual ha venido disminuyendo, notando una baja deserción entre los años 2016 a 2018:

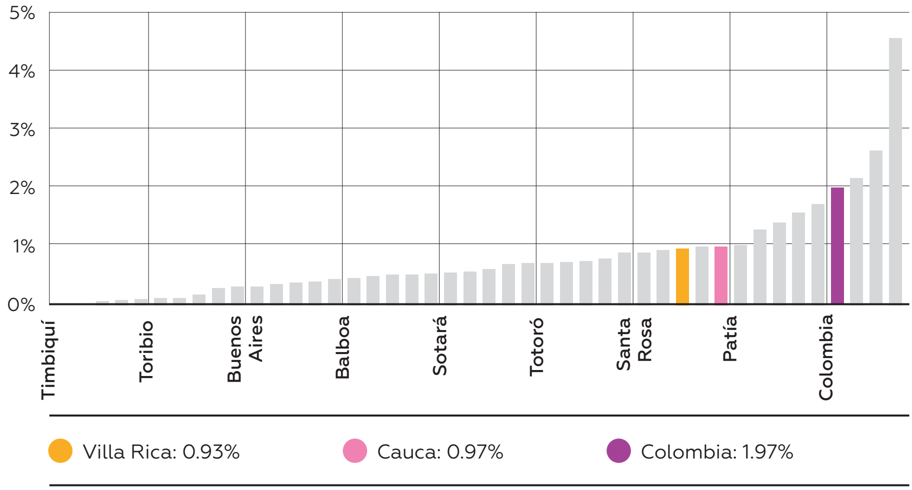
TABLA — 1
Tasa de deserción interanual en educación básica y media



Fuente: Plan de desarrollo Municipal 2020-2023

Ahora, la tasa de repitencia en el municipio de Villa Rica se considera baja ya que se encuentra por debajo de un dígito porcentual (0,93%).

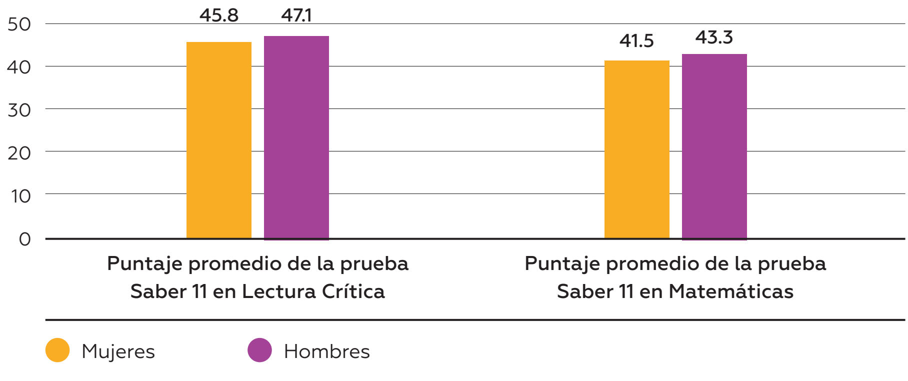
TABLA —— 2
Tasa de repitencia sector oficial



Fuente: Ministerio de Educación Nacional 2018

El puntaje promedio en las pruebas saber 11 en el área de matemáticas para el año 2018 fue de 41,5% para mujeres y 48,3% para hombres:

TABLA —— 3
Puntaje promedio en las pruebas Saber 11 por género



Fuente: Ministerio de Educación Nacional 2018

Para finalizar esta caracterización de los resultados en Educación del municipio de Villa Rica, revisemos el número de Instituciones educativas con las que cuenta el municipio:

TABLA —— 4
Instituciones educativas públicas y privadas

NOMBRE	TIPO	SEDE / SUB-SEDE	ZONA UBICACIÓN	GRADOS
Institución Educativa Técnico Comercial Simón Bolívar	Pública	Simón Bolívar (principal)	Urbano	Transición a 11°
Institución Educativa Técnico Senón Fabio Villegas	Pública	Senón Fabio Villegas (principal) Mundo Infantil San Fernando	Urbano	Transición a 11°
Institución Educativa Juan Ignacio	Pública	Juan Ignacio (principal)	Rural	Transición a 11°
Institución Educativa La Primavera	Pública	La Primavera (principal) Agua Azul	Rural	Transición a 11°
Centro Docente El Chalo	Pública	El Chalo (principal) Cantarito	Rural	Transición a 5°
Escuela Evangélica La Pola	Privado	Única sede	Urbano	Transición a 9°
Liceo Boque Alegre	Privado	Única sede	Urbano	Transición a 5°
Gimnasio Inter Étnico del Cauca	Privado	Única sede	Urbano	Educación por ciclos
Liceo Emmanuel	Privado	Única sede	Urbano	Educación por ciclos

Fuente: Ministerio de Educación Nacional 2018

La institución Educativa Juan Ignacio es mixta, pertenece al sector oficial. A pesar de estar en una zona rural, cuenta con 342 estudiantes de estrato 1, tiene una planta de 20 profesores, un rector y una secretaria académica, el énfasis de la institución es académica-industrial. La planta física consta de 14 aulas de clase, una sala de sistemas, dos grupos de primaria están por fuera de la institución, existe una instalación donde funciona el restaurante escolar y una tienda.

Modelo pedagógico de la Institución Educativa Juan Ignacio

El modelo transversal a toda la institución es el constructivista que se caracteriza por darle el papel protagónico al estudiante, siendo este el responsable de su propio proceso de aprendizaje y de construcción de su conocimiento. En este modelo se centra en la actividad mental constructiva del estudiante no es solo cuando manipula, explora, descubre o inventa, sino también cuando lee, escucha, conjetura, indaga y reflexiona.

Adicional a este modelo, también se trabaja con el modelo educativo flexible de educación integral, este modelo busca vincular y asegurar la permanencia en la institución de educación a hombres y mujeres mayores de 15 años y en situación de vulnerabilidad, que se encuentren en la zona rural garantizándoles el derecho a la educación y una formación de calidad.

La población de la Institución Educativa Juan Ignacio

En esta actividad participaron 26 estudiantes del grado 9° de la institución educativa Juan Ignacio, que fueron elegidos al azar y que contaron con internet en sus hogares y con un dispositivo móvil o computador para el desarrollo de las situaciones problemas, esto porque la aplicación de la actividad se hizo en la época de la pandemia y parte de la actividad se hizo en un encuentro sincrónico. Las edades de los estudiantes que participaron en esta investigación oscilan entre los 13 y 16 años distribuidos de la siguiente manera:

TABLA 5
Distribución por género

EDAD (AÑOS)	MASCULINO	FEMENINO
13	4	4
14	4	6
15	4	0
16	2	2

La Universidad Icesi

La actividad se diseñó y se aplicó para un grupo del curso de álgebra y funciones, que es el primer curso de matemáticas que toman los estudiantes de pregrado de los programas de ingenierías y ciencias en el primer semestre de ingreso a la Universidad Icesi.

La universidad Icesi es una Institución de Educación Superior con acreditación institucional de alta calidad desde el año 2010, esta institución está ubicada en el sur de la ciudad de Cali y cuenta con alto prestigio académico en formación de profesionales y en investigación, actualmente ofrece 29 programas de pregrado, 2 doctorados y 35 maestrías. Su equipo de profesores se caracteriza por tener formación de la más alta calidad y capacitados en metodologías de aprendizaje innovadoras.

El Proyecto educativo de la Universidad Icesi define un compromiso con la formación de seres sociales con autonomía de pensamiento, que se caracterizan por tener posturas críticas, capacidad de argumentar, analizar información, aprender por sí mismos, liderar equipos, proponer cambios y solucionar problemas, para esto, la Universidad se plantea tres ejes fundamentales:

Las estrategias de aprendizaje activo

Se caracterizan por darle un rol protagónico a los estudiantes en la construcción de su conocimiento, es así como se forman estudiantes críticos, autónomos y comprometidos con su formación. Esta estrategia permite formar hábitos de estudio y fortalece las habilidades de indagación, investigación y aprendizaje autónomo en los estudiantes.

Para alcanzar este objetivo, la Universidad se propuso, por un lado, dejar los esquemas tradicionales que conciben la educación como un lugar de instrucción y, por otro, tomar distancia de aquellos conceptos y teorías que conciben la Universidad como institución productora de profesionales técnicos. En ese sentido, se decidió transformar a la Universidad Icesi en un centro de estudio donde los estudiantes puedan desempeñar un rol activo en la construcción de nuevos saberes y no solamente se desarrollen intelectualmente en una profesión sino, a la vez, como personas y ciudadanos autónomos, honestos, reflexivos y responsables con su entorno social y político (Universidad Icesi, 2004).

En los cursos de matemáticas y específicamente en el curso de álgebra y funciones, esta estrategia nos permite organizar el curso por etapas que van desde la revisión del estudio previo realizado por el estudiante, hasta la profundización de las temáticas relacionadas con el acompañamiento del profesor. Es así como cada semana, se plantean tres momentos fundamentales, con el objetivo de poner en juego todos los elementos que caracteriza el aprendizaje activo: la preparación de clase, el trabajo durante las sesiones de clase y la socialización de la temática a estudiar para la siguiente semana. Un instrumento que nos ha permitido direccionar estos momentos es la Ruta de Clase, esta es una construcción que realiza todo el equipo de profesores del curso de álgebra y funciones previo al inicio del curso y se caracteriza por ser una guía de estudio que orienta el quehacer del estudiante alrededor de los conceptos matemáticos a trabajar cada semana. La Ruta de Clase también permite direccionar los objetivos a alcanzar en la semana, esta dinámica está dividida en tres partes:

La primera parte que está relacionada con la preparación de la clase, aquí el estudiante encuentra preguntas conceptuales, teóricas y algunos ejercicios para resolver que lo invitan a realizar búsquedas en textos matemáticos, en la web, revisar vídeos o explorar recursos, como GeoGebra; en esta primera parte se espera que el estudiante indague sobre los contenidos propuestos y traiga preguntas, ejercicios que le llamaron la atención, conjeturas, a la clase.

La segunda parte, se desarrolla en la clase, se inicia revisando y socializando la preparación de la Ruta de clase realizada por los estudiantes, de esta manera, se abre un espacio de discusión, aclaración de dudas, trabajo grupal y/o cortas exposiciones para revisar aspectos puntuales de la ruta de clase. Esta revisión es fundamental en nuestro modelo de Aprendizaje Activo, ya que es el momento en el que el estudiante está compartiendo y organizando todas sus ideas y aclarando dudas con el objetivo de llegar a la construcción de su conocimiento. Seguidamente el profesor profundiza y refuerza distintos conceptos que, de acuerdo con el trabajo previo del estudiante, requieren más atención, para esto cada profesor pone en juego distintas estrategias de trabajo como discusiones grupales, exposiciones, trabajo por grupos, entre otras. Los insumos principales para esta sesión son las preguntas y todo el material que el estudiante preparó previamente a la clase.

La tercera parte es una presentación de la siguiente ruta de clase (trabajo para la semana siguiente), la cual incluye los objetivos que se pretenden alcanzar en la siguiente sesión y algunos aspectos teóricos relacionados con el tema, esto puede incluir la explicación de un concepto, teorema o la solución de algún ejercicio que inicia la nueva temática.

Modelo pedagógico de la Universidad Icesi

Los programas de pregrado de la Universidad Icesi cuentan con dos grupos de asignaturas: las del currículo central y las del currículo específico. El primer grupo, las materias del currículo central, está conformado por todas aquellas asignaturas que todos los estudiantes deben ver, estas materias permiten que se genere interacción entre estudiantes de diferentes carreras y que se generen espacios de aprendizaje a partir del trabajo colaborativo.

Las del segundo grupo, las materias del currículo específico, está formado por aquellas materias en las que el estudiante profundizará en aspectos de su propia carrera, estas materias le permiten al estudiante profundizar en sus temas de interés de acuerdo con sus gustos e inclinaciones. El curso de álgebra y funciones hace parte del grupo de materias del currículo central.

El tercer eje del Modelo Educativo de la Universidad Icesi propicia el desarrollo de las capacidades necesarias para el ejercicio de cada carrera y la consolidación de los valores definidos por la Universidad. Estas capacidades están asociadas con las habilidades de relacionarse, la capacidad intelectual vinculada con el análisis y manejo de la información, la capacidad de trabajo personal efectivo y la capacidad de trabajo en equipo.

Ya teniendo algunos elementos que permiten entender el modelo educativo al que le apuesta la Universidad Icesi, es importante caracterizar la población de estudiantes a la que aplicamos la actividad que describiremos más adelante y los profesores que atienden esta población.

La población de la Universidad Icesi

La actividad se aplicó a 21 estudiantes del curso de álgebra y funciones de la Universidad Icesi, la población de estudiantes de este grupo de álgebra y funciones tienen en promedio 17 años de edad, la mayoría (85%) acaban de terminar su educación media, es decir se graduaron e ingresaron inmediatamente a la Universidad, el 60% son egresados de Instituciones públicas del suroccidente del país y el 40% restante son de Instituciones de carácter privado sobre todo de la ciudad de Cali. Los estudiantes pertenecen a la facultad de Ingeniería, específicamente a los programas de Diseño Industrial, Ingeniería Industrial y algunos al programa de ingeniería de sistemas.

De otro lado, los profesores que ofrecen el curso de álgebra y funciones tienen formación en matemáticas y en Educación matemática, todos tienen maestría y diferentes cursos, así como diplomados y especializaciones que complementan su formación como profesores. El equipo de docentes del curso de álgebra y funciones se concibe como una comunidad de práctica ya que está en continua reflexión alrededor del quehacer docente, esta ha permitido que, a lo largo de estos últimos seis años, se haya avanzado en la construcción de materiales orientados por las competencias matemáticas, también se han hecho cambios sustanciales en la evaluación del curso, pasando de una evaluación tradicional de tres parciales y dos pruebas cortas, a tener una formación con diferentes mecanismos que permitan hacer seguimiento al desempeño de los estudiantes, pero que también aporten a la identificación de los aspectos en los que se debe acompañar al estudiante con el ánimo de fortalecer sus competencias en matemáticas. Otro de los aspectos en los que los profesores han aportado al curso es en la incorporación de actividades en donde se deba hacer uso de las TIC, particularmente del software de Geometría dinámica GeoGebra.

¿QUÉ SE HIZO Y CÓMO SE HIZO?

La actividad hace parte de una serie de hojas de trabajo que propone el profesor David Benítez en el marco del Diplomado de Diseño de ambientes de aprendizaje mediados con tecnologías, que es ofrecido por la Universidad Icesi en colaboración con el Instituto GeoGebra Cali. Estas actividades son compartidas con los participantes del diplomado de quienes se espera que las adapten a sus contextos laborales, las apliquen y finalmente se analicen los resultados obtenidos.

Es así como esta actividad fue adaptada para ser aplicada a un grupo de estudiantes de grado 9° de la Institución Educativa José Ignacio como también a un grupo de estudiantes del curso que se ofrece a los estudiantes en primer semestre llamado de álgebra y funciones de la Universidad Icesi.

Esta actividad está construida alrededor de los siguientes objetivos:

- Modelar matemáticamente una situación en contexto real, de tipo variacional mediante la medida de la carga de un celular, para la construcción de conocimientos relativos a la función lineal.
- Analizar desde diferentes registros y representaciones, como las representaciones gráficas, cartesianas, algebraicas, las conexiones que existen entre ellas y los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas (Función lineal).
- Fortalecer, por medio de la exploración, la conjeturación y las construcciones propias de los estudiantes, la competencia de comunicar y argumentar para la construcción del concepto de función lineal y algunos conceptos subyacentes.

Descripción de la actividad

En esta actividad los estudiantes deben indagar sobre el tiempo que tarda su celular para alcanzar la carga máxima, para esto inician colocando su celular a cargar partiendo desde una carga de 0%, es decir que tienen su celular completamente descargado, entonces lo conectan a una fuente de poder y toman el tiempo con un cronometro de más o menos 15 valores y responderá la hoja de trabajo 1.

En esta actividad el estudiante debe estimar cómo cambia el porcentaje de carga de un celular a medida que pasa el tiempo, esta es una actividad en contexto real, es un fenómeno de cambio o covariación, donde se problematiza una situación real que es de interés para los estudiantes, ya que ellos desean conocer en cuanto tiempo se carga su

FIGURA —— 2
Carga de un celular

celular de manera total, esta situación no solo es de interés para ellos, sino que se ha convertido en algo de gran importancia para las personas en general.

Este tipo de situaciones permite medir magnitudes como el tiempo y relacionarlas con otras, además permite el manejo apropiado de variables, la interpretación de fenómenos a partir de la observación, la conjeturación y la organización de la información en tabla, gráficas, entre otros. Los estudiantes empezarán con un momento de experimentación, para esta etapa se utilizará el software de geometría dinámica GeoGebra, cabe aclarar que en ambas instituciones los estudiantes ya han tenido un acercamiento a este software, es decir que ya los estudiantes conocen las cajas de herramientas y hacen unas construcciones básicas. En este software los estudiantes deben ingresar la información en una tabla que deben construir en la hoja de cálculo que ofrece GeoGebra, en una columna deben consignar el tiempo y en la otra columna el porcentaje de carga, seguidamente harán uso de la herramienta gráfica de GeoGebra para seleccionar los datos y construir una aproximación lineal, la vista algebraica de GeoGebra permite hacer regresión para encontrar el modelo algebraico que más satisface los datos consignados en la tabla; con la información anterior ellos pueden dar respuesta a las diferentes preguntas que se formulan por actividades, donde en la primera actividad el estudiante se familiariza con la situación y hace el reconocimiento de dependencia entre magnitudes; la segunda actividad se relaciona con la representación gráfica y el rango de variación de las magnitudes involucradas; la tercera actividad estudia la cuantificación del cambio y, finalmente, la cuarta actividad demanda que den una interpretación o lectura a la gráfica construida a partir de los datos de la carga con respecto al tiempo de dos celulares.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

La actividad de la carga de un celular exige que el estudiante realice lo siguiente:

Leer y entender el problema

Tomar datos del tiempo y del porcentaje de carga de un celular, identificación de las magnitudes involucradas. Los estudiantes llevan los celulares completamente descargados, un reloj o cronometro, empiezan de forma individual a registrar en una tabla. Ponen a cargar el celular, en la hoja de trabajo encontrarán una tabla con dos columnas tiempo (minutos) y porcentaje de carga (%) donde se registra, ese porcentaje arrancando desde cero cada vez que cambie la carga.

Organizar la información de la situación problémica en una tabla. Como se muestra a continuación:

TIEMPO ()	
CARGA	

Interpretar los datos de la tabla

Identificar errores, encontrar la relación entre la variable que intervienen en la situación, realizar la construcción de una representación algebraica asociada al modelo. En el desarrollo de la hoja de trabajo los estudiantes deben responder varias preguntas que le ayudarán a construir conjeturas, interpretaciones, comunicar y argumentar ideas. A continuación, se presentan algunas, aunque las demás se podrán ver en el Anexo 1:

- Según los datos consignados en la tabla ¿Qué se puede extraer de ella, qué se puede decir?
- ¿Qué variables se están estudiando en esta situación? Explique

- ¿Escriba de qué depende la carga del celular?
- ¿A medida que cambia el tiempo describa cómo cambia el % de carga según la tabla?
- Según los datos obtenidos en la tabla cuando han transcurrido 10 min, 15 min, 20 min, ¿cuál es la carga del celular? Cómo obtuvo los datos, justifica su respuesta.
- De acuerdo con lo que se observa en la tabla con respecto al comportamiento de los datos, describa lo que ocurre con la carga a medida que el tiempo aumenta.

Comunicar

Por último, se socializan los resultados, se comunican las ideas haciendo uso de estrategias metacognitivas, que son aquellas que se observan para dar respuesta a una de la pregunta de investigación y justificar procedimientos y resultados. Al finalizar las actividades se hace una formalización de los conocimientos y habilidades que aborde la presente hoja de trabajo, entre ellas están las variables dependientes e independientes que intervienen en la situación, el rango y dominio de la situación.

A continuación, se presentan algunas de las preguntas asociadas con esta etapa de comunicación:

- ¿Con qué se relaciona el problema?
- Identificar variable dependiente e independiente.
- Hacer diferentes registros de representación: por ejemplo, representar la información en tabla, de manera gráfica y algebraica o encontrar la ecuación que modele la situación, utilizar tecnología y responder algunas preguntas.
- Monitorear o autoevaluación del proceso (estrategias metacognitivas).

Condiciones de aplicación

La actividad se realiza con 26 estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Juan Ignacio, de los cuales 14 son niños y 12 niñas, se utilizó o se apoyó con tecnología en este caso el software de GeoGebra, se realizó entre el 8 de mayo y 28 de mayo del 2022 sesiones de 110 minutos, los miércoles se realizaron las sesiones por tareas y se hizo la socialización después de cada tarea. Primero leímos la actividad que se le fue entregada en una hoja de trabajo, se hizo de manera individual, luego gran debate o socialización con todo el grupo y por último la formalización al terminar cada tarea en total en este caso son cuatro tareas las que componen esta situación.

En la aplicación que se hizo en la Universidad Icesi, se realizó en unos de los grupos del curso de álgebra y funciones, curso que se ofrece a los estudiantes que inician su formación universitaria y que pertenecen a los programas de ingeniería, ciencias, entre otras. Esta actividad se realizó en dos sesiones de clase, cada una de las sesiones cuentan con dos horas, para un total de cuatro horas de aplicación de la actividad, las partes que se denominaban "tareas" fueron abordadas en el espacio de clase. Los estudiantes contaban con los recursos tecnológicos para realizar las actividades en GeoGebra.

SOPORTES TEÓRICOS

Este proyecto está enmarcado en dos grandes referentes teóricos que permiten orientar el diseño y análisis de la actividad a poner en juego: el marco teórico está fundamentado en las ideas alrededor de la resolución de problemas y las actividades están orientadas por el aprendizaje por competencias.

La resolución de problemas

La resolución de problemas ha cobrado un lugar importante en la enseñanza de las Matemáticas. Desde la mitad de los noventa se ha empezado a investigar sobre este asunto y se ha incluido en las reformas curriculares a nivel mundial, desde allí se proponen enfoques que orienten la incorporación de problemas en la escuela como camino para la enseñanza de las matemáticas.

En este sentido, el profesor David Benítez ha presentado investigaciones, sistematizaciones y una serie de artículos que, desde una mirada teórica, justifican la importancia de centrar los procesos de enseñanza-aprendizaje en la resolución de problemas. Un ejemplo de estos documentos que reportan una investigación es el caso de su tesis doctoral titulada: Formas de Razonamiento Que Desarrollan Estudiantes

Universitarios En La Resolución De Problemas Con El Uso De Tecnología, sustentada en el año 2006 en el Cinvestav, este informe presenta un panorama claro y nutrido donde se implementa y analiza, con el enfoque de resolución de problemas mediados con tecnologías digitales, un problema en contexto real, que permitió a los estudiantes utilizar distintas representaciones, plantearse preguntas, construir conjeturas, establecer relaciones y presentar distintos argumentos. Entre las conclusiones de esta investigación se destaca la importancia de trabajar con el enfoque de resolución de problemas y el uso de software dinámico, que en conjunto permite a los estudiantes potenciar su aprendizaje.

En el enfoque de resolución de problemas resulta fundamental en el quehacer de los estudiantes que están aprendiendo matemáticas:

Un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas, ni tampoco a la aplicación mecánica de ciertos procedimientos. Por el contrario, es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permitan generar y comunicar conjeturas. (Alarcón et al., 1994, como se citó en Benítez, 2006, p. 12).

En este mismo sentido, Miguel De Guzmán (1992) se refirió a las ventajas y la importancia de plantearles problemas a los jóvenes para su aprendizaje:

Es lo mejor que podemos proporcionarles a nuestros jóvenes, capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; el mundo evoluciona muy rápidamente, los procesos afectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizado y creativo, porque muchos de los hábitos que así se consoliden tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas y es aplicable a todas las edades. (Guzmán, 1992).

El movimiento de la resolución de problemas surge a finales de la década de los 70 como resultado del fracaso de aquellas revoluciones mundiales alrededor de la enseñanza de las matemáticas, conocida como la matemática moderna y el regreso a lo básico.

El estudio de la resolución de problemas, desde el punto de vista de la heurística, tiene fundamentos en la famosa obra escrita por George Polya (1887-1985) titulada *¿How To Solve It?* (Polya, 1945) donde presentó sus axiomas que dan luces para entender los razonamientos manifiestos al momento resolver problemas. Esta obra puede ser entendida por el público en general, pero la población a la que el autor pretende llegar son tanto profesores como estudiantes con el objetivo de aportar una metodología heurística que contribuyera no solo a la solución de problemas matemáticos sino a problemas de la vida cotidiana.

Polya examina mediante la introspección, el comportamiento de la persona que resuelve problemas, denominado como el resolutor de problemas, pero lo examina como un resolutor "ideal" y a partir de ello, elabora un modelo del proceso de resolución dividido en fases que ese resolutor ideal recorre linealmente, pasando de una a otra solo cuando la anterior ha concluido, su modelo está organizado en cuatro fases:

Entender el problema

Se caracteriza por identificar las incógnitas, las condiciones del problema, entender lo que se está preguntando, para Polya, esta fase es una de las más difíciles de superar para los estudiantes dado que los resolutores inexpertos se "saltan" esta fase e inician aplicando algoritmos sin tener claro el objetivo de estos.

Elaboración del plan

Polya propone que se plantee una metodología de trabajo, por ejemplo, empezar resolviendo un problema similar pero menos complejo, aplicar procedimientos de ensayo y error, buscar un patrón o elaborar una lista.

Ejecución del plan

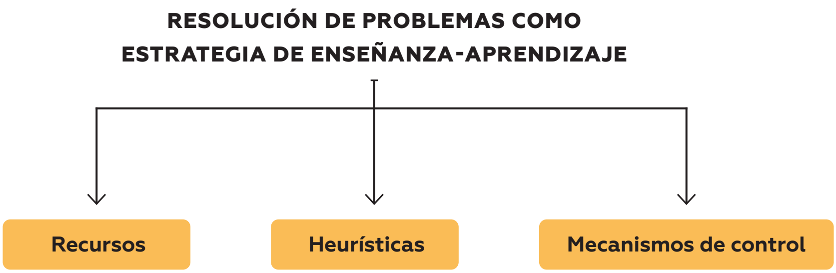
Ejecutar la estrategia que se ha definido.

Examinar la solución obtenida

Esta es una de las etapas en las que se puede generar más aprendizaje ya que es la etapa en la que se hace la reflexión de lo obtenido, se pueden identificar errores, en la que se pueden hacer generalizaciones o extender la solución a otros problemas.

De otro lado, es importante también mencionar los trabajos del norteamericano Alan Schoenfeld (1915) en los años ochenta. Schoenfeld es considerado en la actualidad como el principal exponente de la resolución de problemas en educación matemática. Fue presidente de la American Educational Research Association y vicepresidente de la National Academy of Education (EEUU). También el autor principal para los años 9 a 12 de los Principios y Estándares en la Educación Matemática del National Council of Teachers of Mathematics de los Estados Unidos y cuenta con 19 libros publicados y más de 50 artículos pensados y escritos por él.

Schoenfeld retoma los aportes de Polya en la resolución de problemas y complementa este trabajo (Schoenfeld, 1985) basando su estudio en las observaciones de los protocolos de resolutores reales, los comportamientos que estos desarrollan mientras resuelven problemas e intenta categorizar sus conductas y describir el conjunto del proceso como un conjunto de episodios, con lo que elabora un modelo de acción. A partir de estos, categoriza algunos elementos a tener en cuenta en el trabajo de resolución de problemas como una estrategia didáctica:



Los recursos

Esto incluye todos los conocimientos previos de los individuos, en algunos casos estos conocimientos previos son obstáculos ya que están mal aprendidos y no permiten consolidar nuevos aprendizajes, también aquí se incluyen algoritmos, procedimientos y herramientas, además de que es importante que el profesor identifique cómo el individuo accede a sus conocimientos.

Heurísticas

Schoenfeld toma distancia de la postura de Polya cuando considera que cada tipo de problema necesita de ciertas heurísticas particulares. Es decir, cada problema tiene unas características diferentes que exigen de estrategias distintas para resolverlo, a diferencia de la propuesta de Polya que plantea que la estrategia es genérica para todo tipo de problemas. Para tomar un ejemplo, Polya sugiere que se realicen diagramas o tablas como heurística, pero el norteamericano piensa que no en todos los problemas se puede poner en práctica este aspecto. Aquí cabe resaltar que los dos planteamientos no se contraponen, sino que al contrario se complementan.

Control

Concibe esto como un mecanismo que se debe desarrollar en el estudiante y que tiene que ver con cómo un estudiante controla su trabajo, y si es capaz de identificar si en algún momento de la resolución del problema seleccionó erróneamente las herramientas o algoritmos necesarios. Schoenfeld resalta que la persona que está resolviendo el problema debe saber qué es capaz de hacer, con qué cuenta y también debe ser capaz de revisar si sus resultados corresponden al problema.

Tomando en cuenta los aportes de Polya y Schoenfeld, se reconoce que la resolución de problemas debe estar presente en el currículo de matemáticas y debe ser un objetivo transversal a toda la escolaridad que promueva el aprendizaje de la disciplina.

En este sentido, es necesario dar una mirada a algunos elementos curriculares que orientan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Colombia. El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (Ministerio de Educación Nacional, 1998), elaboró los Lineamientos Curriculares de matemáticas que constituyen un material para los maestros de educación básica y media, en el que se propone que:

El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 24).

En este documento, se propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayores alcances y más duraderos que los tradicionales, que no solo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos, teoremas y algoritmos. Propone asignarle valor real a los procesos generales de pensamiento, como la comunicación y argumentación, la modelación y representación, la comparación y ejercitación de procedimientos, el planteamiento de estrategias para la *resolución de problemas*. Sobre esto último señala:

Para lograr que las metas propuestas sobre la resolución de problemas, los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobar sus ideas. (Ministerios de Educación Nacional, 1998, p. 77).

Este tipo de planteamientos didácticos anima la participación, la libre expresión y la discusión entre los individuos. Tomando distancia de las metodologías tradicionales que marginaban la participación de los estudiantes y le asignaban un papel pasivo.

De otro lado, a nivel internacional, es importante mencionar la reforma planteada en los Estados Unidos, construida por el Consejo Nacional de Profesores (Consejo Nacional de Profesores NCTM, 2000), que ha ofrecido un interesante conjunto de planteamientos pedagógicos y sociales, que vale la pena resaltar ya que a pesar de que algunos solo tienen validez en ese país, son elementos importantes que aportan a la educación matemática en general, por ejemplo, afirman que la habilidad para resolver problemas no solo es un propósito para el aprendizaje de las matemáticas, sino también el medio principal de conseguirlo. Afirman que el currículo desde la primaria hasta la educación media, deben permitir que todos los estudiantes que: Construyan nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas, Resuelvan problemas que surgen en matemáticas y en otros contextos, Apliquen y ajusten una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas, Monitoreen el proceso de resolver problemas de matemáticas. (Consejo Nacional de Profesores NCTM, 2000, p. 57; Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Así también, propone que los estudiantes deben tener oportunidades frecuentes para formular y resolver problemas complejos que requieren una cantidad significativa de esfuerzo.

COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Por medio de esta actividad se espera que el estudiante fortalezca sus competencias en matemáticas y para esto es necesario contextualizar qué se concibe por cada una de las competencias que se movilizarán, las descripciones que se ofrecen a continuación son producto de revisión teórica del equipo de profesores a cargo del curso de álgebra y funciones a los documentos: (Ministerio de Educación Nacional, 2006) Estándares básicos de competencias en matemáticas, las pruebas saber Pro (Instituto Colombiano para la evaluación de la educación, 2007), las pruebas saber TyT (Instituto Colombiano para la evaluación de la educacion ICFES, 2016) y las pruebas y documentos de PISA.

Esta actividad está enmarcada en el aprendizaje por competencias, por esto es necesario recurrir a procesos matemáticos como:

Diseño de estrategias para resolver problemas

Se requiere que el estudiante analice la situación, identifique lo relevante de ella, construya modelos mentales y represente en diferentes registros lo planteado en la situación; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros; formular distintos problemas, posibles preguntas y respuestas que surjan a partir de ella. Este proceso general requiere del uso flexible de conceptos, procedimientos y diversos lenguajes para expresar las ideas matemáticas pertinentes y para formular, reformular, tratar y resolver los problemas asociados a dicha situación.

Argumentar y comunicar

Pone en juego el uso de la prueba, la refutación y el contraejemplo, como medios para validar y construir algunas afirmaciones. Además, comprende la capacidad de justificar o dar razón de afirmaciones o juicios a propósito de situaciones que involucren información cuantitativa u objetos matemáticos (las afirmaciones y los juicios pueden referirse a representaciones, modelos, procedimientos, resultados, etcétera) a partir de consideraciones o conceptualizaciones matemáticas.

Modelar y representar

Se debe utilizar diversos registros de representaciones para construir y expresar ideas matemáticas.

Ejercitar procedimientos y algoritmos

Implica dominar algunos protocolos aritméticos y algebraicos y conocer cómo, cuándo y por qué usarlos de manera flexible y eficaz.

EL CONTEXTO

Es importante considerar el contexto en el que se enmarca la actividad que aquí se propone, ya que este es un aspecto que no solo permite caracterizar la situación problema, sino que también permite entender la relación que se da entre el resolutor y el problema. Para la corriente denominada Educación matemática realista, donde su mayor representante es Hans Freudenthal (1905-1990), matemático y educador alemán, la matemática surge como matematización de la realidad y de esa realidad debe originarse el aprendizaje matemático, esto implica que las matemáticas deben estar en conexión con el mundo real, lo cercano y cotidiano a los estudiantes, como también implica considerar lo realizable, imaginable o razonable, Freudenthal afirma que "Yo prefiero aplicar el término 'realidad' a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario" (1991, p. 17).

En este sentido, la actividad que se presenta en este documento está enmarcada en el contexto realista, ya que toma y presenta los problemas, en principio en contextos de la vida diaria, de modo tal que los estudiantes tienen conocimientos acerca de la situación planteada, pero además pueden imaginar las posibles respuestas, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas. Es importante mencionar que este contexto no es un pretexto para introducir un tema sino que ha sido seleccionado sabiendo que el contexto en sí ya es un medio de aprendizaje. En este sentido, volviendo a las ideas de Freudenthal "Enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar la claridad del mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo" (1991). Retomando esta idea, cuando el contexto cobra sentido para el estudiante, son puntos de partida de su actividad matemática, promoviendo el uso de su sentido común y estrategias asociadas a los conocimientos que tiene del contexto, permitiéndoles avanzar autónomamente hacia la formalización.

EL PAPEL DE LAS TECNOLOGÍAS

El concepto de *función* es uno de los temas fundamentales en la formación matemática escolar, principalmente por su rol en las representaciones, en diversos registros, de los modelos matemáticos. (Santos & Moreno, 2001) y (Benitez & Santos, 2003) plantean que las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en realidades cuando se pueden manipular y transformar, lo cual es posible con el uso de las herramientas computacionales. Hitt (2003) plantea que las tecnologías influyen tanto en la forma de enseñar como en la de aprender, destacando la importancia del manejo de diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos y criticando la tendencia tradicional de privilegiar las representaciones algebraicas. En esta misma dirección, pero centrándose en un software en particular, Álvarez, Avello Martínez y López (2014) plantean que:

Uno de los asistentes matemáticos desarrollados como software libre más popular en los últimos años es GeoGebra, un recurso escrito en Java y disponible en múltiples plataformas. Este permite el dinamismo de las figuras geométricas, lo que facilita analizar la variación o no de sus propiedades y relaciones al modificarlas. Asimismo, posibilita examinar un objeto matemático en diferentes registros de representación, por medio de la articulación de su interfaz gráfica con una algebraica, una de cálculo simbólico y una hoja de cálculo, lo que favorece el establecimiento de relaciones y una comprensión más profunda de lo que se estudia. *(p. 27)*.

ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD

A continuación, se presenta el análisis de cada una de las partes que conforman la hoja de trabajo, esta actividad se aplicó a los estudiantes de la institución Juan Ignacio como también a los estudiantes de un grupo del curso álgebra y funciones de la Universidad Icesi, en cada una de las partes de la hoja de trabajo se describen las preguntas, condiciones de aplicación, los objetivos o propósitos, el análisis cuantitativo y cualitativo de cada una de ellas y por último se hacen unas consideraciones finales.

Análisis de los resultados cuantitativos y cualitativos de la hoja de trabajo

La hoja de trabajo inicia con las siguientes indicaciones para el estudiante:

a. Primero tomarás un celular descargado, luego lo conectarás a una fuente de poder.

b. Tomarás los datos que se te pidan y responderás la siguiente hoja de trabajo.

c. En el momento que el profesor lo indique, debes socializar los resultados, comunicar tus ideas, y justificar procedimientos y resultados.

d. Al finalizar las actividades se hará una formalización de los conocimientos y habilidades que aborde la presente hoja de trabajo.

La hoja de trabajo está divida en cuatro partes, cada una de estas partes contiene la situación, tareas, propósitos, número de preguntas y elementos matemáticos involucrados en cada actividad, a continuación, se analizarán cada una de las partes:

Análisis de Actividad No. 1

A continuación, se hace el análisis de los datos de la primera parte de la hoja de trabajo, teniendo en cuenta que el análisis se hace de forma cuantitativa y cualitativa donde se tiene en cuenta la rejilla de análisis. El propósito de la primera tarea es que el estudiante analice el comportamiento de los datos consignados en un registro tabular y construya una gráfica que satisfaga estos datos.

A partir de los datos consignados en la tabla, se empiezan a hacer una serie de preguntas que pretenden llevar al estudiante a analizar cuál es la relación que se puede establecer entre el tiempo que se tarda en cargar un celular y el porcentaje de carga que va ganando el celular:

Una de las preguntas que se les planteó a los estudiantes es:

Según los datos consignados en la tabla ¿Qué puede extraer de ella, qué puede decir?

Los estudiantes respondieron esta pregunta a partir de la búsqueda de relaciones que le permitieran establecer la relación entre el tiempo y el porcentaje de la carga. A continuación, se presentan algunas de las respuestas que dieron los estudiantes:

Según los datos consignados en la tabla ¿Qué se puede extraer de ella, qué se puede decir?

Estudiante 1:

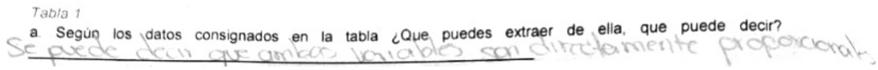
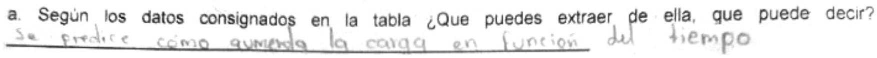


Tabla 1

a. Según los datos consignados en la tabla ¿Que puedes extraer de ella, que puede decir?

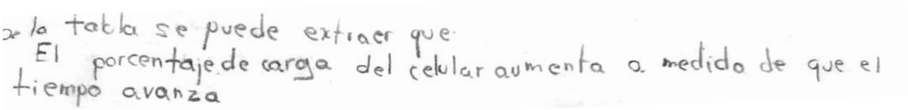
Se puede decir que ambas variables son directamente proporcional.

Estudiante 2:


a. Según los datos consignados en la tabla ¿Que puedes extraer de ella, que puede decir?

Se predice como aumenta la carga en función del tiempo

Estudiante 3:


de la tabla se puede extraer que

El porcentaje de carga del celular aumenta a medida de que el tiempo avanza

En estas tres respuestas es importante identificar que los estudiantes identificaron una relación variacional entre el tiempo de carga y el porcentaje de carga y que para describirla acuden a conceptos matemáticos como variación directa o a calificativos asociados al cambio como "aumenta".

El análisis general de las 12 preguntas que componen la primera parte de la hoja de trabajo se realizó de acuerdo a tres categorías en las que se pueden clasificar las respuestas:

Inicial: aquellos estudiantes que no logran dar respuesta acertada a la pregunta. **En proceso:** aquí se clasificaron todos aquellos estudiantes que dan una respuesta parcialmente correcta a la pregunta, pero además que en su respuesta permite evidenciar la falta de asociación de conceptos matemáticos y **esperado:** en la categoría de esperado se ubican aquellos estudiantes que expresan sus respuestas correctamente y dan argumentos haciendo uso de conceptos y propiedades matemáticas.

Vale la pena aclarar que no se encuentran estudiantes que dejen la hoja de trabajo sin contestar. En la primera tarea encontramos 12 preguntas de lo cual se encontraron los siguientes resultados:

TABLA —— 6
Distribución de los resultados en la Institución educativa Juan Ignacio

PREGUNTA	NIVELES			PORCENTAJE QUE CORRESPONDE AL NIVEL ESPERADO	DESVIACIÓN ESTANDAR
	INICIAL	PROCESO	ESPERADO		
	1	**2**	**3**		
P1	5	4	17	82,05128205	21,33333333
P2	9	3	14	73,07692308	19
P3	11	4	11	66,66666667	17,33333333
P4	6	6	15	74,35897436	19,33333333
P5	5	1	20	85,8974359	22,33333333
P6	1	5	20	91,02564103	23,66666667
P7	1	1	24	96,15384615	25
P8	3	10	13	79,48717949	20,66666667
P9	10	3	13	70,51282051	18,33333333
P10	10	3	13	70,51282051	18,33333333
P11	12	5	9	62,82051282	16,33333333
P12	11		15	71,79487179	18,66666667
PROMEDIO	26,72955975	14,1509434	57,2327044	77,02991453	20,02777778
				C.V	8,180438486

Fuente: elaboración propia

TABLA —— 6
Distribución de los resultados en el grupo de álgebra y funciones

PREGUNTA	NIVELES			PORCENTAJE QUE CORRESPONDE AL NIVEL ESPERADO	DESVIACIÓN ESTANDAR
	INICIAL	PROCESO	ESPERADO		
a	3	5	13	62	5,3
b	4	6	11	52	3,6
c	1	10	10	48	5,2
d	2	6	13	62	5,6
e	1	7	13	62	6,0
f	1	0	20	95	11,3
g	0	1	20	95	11,3
h	2	8	11	52	4,6
i	10	3	8	38	3,6
j	3	3	15	71	6,9
k	2	5	14	67	6,2
l	0	2	19	90	10,4
PROMEDIO	2	5	14	66	6,7
				CV	10,1

Fuente: elaboración propia

En cuanto a la tarea inicial, se encuentran algunas preguntas que permiten dar cuenta de las variables involucradas en la situación, la relación de dependencia y el reconocimiento de puntos máximos y mínimos en la situación, estos elementos se configuran como acercamientos al concepto de función lineal. En cuanto al análisis cuantitativo, se encontró que en la Institución Educativa Juan Ignacio, un promedio del 77,02% de los estudiantes a los que se les aplicó esta actividad responden correctamente estas preguntas, lo cual se puede interpretar como un rendimiento aceptable con respecto a esta primera parte de la hoja de trabajo. En el curso de álgebra y funciones se encuentra un 66% aproximadamente que permite identificar que un poco más de la mitad de los estudiantes respondieron correctamente las preguntas y que esto permite clasificarlos en un desempeño sobresaliente. En términos cualitativos esto implica que los estudiantes pueden resolver actividades sobre las variables que se involucran en la situación, identifican las relaciones de dependencia y la variación que se da entre las dos variables involucradas. Algunas de las preguntas que se plantearon en esta primera parte son:

a. Según los datos consignados en la tabla ¿Qué puede extraer de ella, qué puede decir?

b. De acuerdo con lo que se observa en la tabla con respecto al comportamiento de los datos, describa lo que ocurre con la carga a medida que el tiempo aumenta.

e. Escriba ¿de qué depende la carga del celular?

f. ¿Qué variables se están estudiando en esta situación? Explique

Con respecto a la pregunta b. ¿De acuerdo con lo que se observa en la tabla con respecto al comportamiento de los datos, describa lo que ocurre con la carga a medida que el tiempo aumenta? Esta pregunta, que tiene que ver con el comportamiento de las variables, fue respondida correctamente por 20 de 26 (76.92%) de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio, adicional a esto cabe señalar que para responderla hacen uso de la visualización para encontrar relaciones importantes en la solución del problema, utilizando como estrategias o heurística la observación detallada de la tabla mediante la organización y análisis de los datos que les permitió realizar extracción eficazmente y con precisión, en la siguiente ilustración daremos un ejemplo de respuesta dada por uno de los estudiantes:

e. De acuerdo a lo que se observa en la tabla con respecto al comportamiento de los datos, describe lo que ocurre con la carga a medida que el tiempo aumenta.

cuando el tiempo aumenta sube el porcentaje
Cada 1.20 segundos

Además, nos encontramos que con respecto a esta pregunta 5 de los 26 estudiantes (19.23%) de la Institución Juan Ignacio no describen de manera acertada lo que ocurre con la carga a medida que el tiempo aumenta, argumentan que cambian los minutos, otro responde que a medida que el tiempo aumenta la batería aumenta, estos estudiantes pudieron comprender a la hora de la socialización y de la institucionalización el comportamiento de dichos datos, en la siguiente figura aparece el manuscrito del otro de los estudiantes:

b. ¿A medida que cambia el tiempo describe como cambia % carga según la tabla?

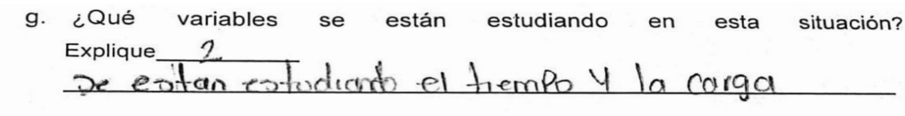
%2 (1.36) %3 (2) %4 (257) a medida
Que el tiempo pasa Baja o Aumenta el tiempo

Con respecto a la segunda pregunta, en el curso de álgebra y funciones se encuentra que los estudiantes en general, es decir el 81% de los estudiantes en total, respondieron parcialmente correcto o completamente correcto la segunda pregunta en la que se les solicitaba que describieran cómo cambiaba el porcentaje de la carga con respecto al tiempo, en la mayoría de los casos los estudiantes acudían a explicar con detalle en qué porcentaje cambia la carga a medida de que transcurre el tiempo, observemos la siguiente respuesta:

b. ¿A medida que cambia el tiempo describe como cambia % carga según la tabla?

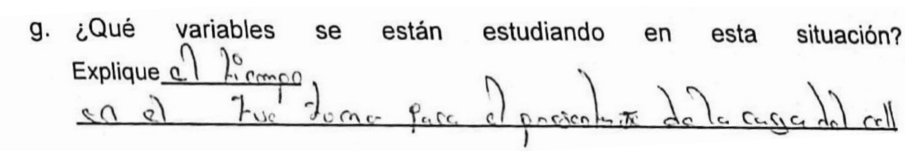
Cambia de manera creciente, un 10% por cada medición de intervalo de tiempo. El tiempo, sin embargo, varía.

En la siguiente pregunta ¿Qué variables se están estudiando en esta situación? Explique. En cuanto a esta pregunta, que tiene que ver con las variables (dependiente e independiente) que interviene o se están estudiando en la situación, encontramos que 24 de 26, es decir 92,30% estudiantes de la Institución Juan Ignacio, dan una respuesta correcta y clara, estos logran identificar las dos magnitudes o variables que intervienen en la situación en las que nos vamos a detener y además logran identificar que la fuente de corriente de donde se ponga a carga el celular también influye en el tiempo que este demore en cargar, lo cual era expuesto por ellos a la hora de la socialización. En la siguiente figura, se muestra el manuscrito del estudiante E25:


g. ¿Qué variables se están estudiando en esta situación? Explique 2
Se estan estudiando el tiempo y la carga

En esta respuesta encontramos que el estudiante identifica las dos variables tiempo y carga, de manera correcta.

Por su parte, entre los resultados globales encontramos que 1 de 26 (3,84%) estudiantes no logra identificar de manera completa las variables que intervienen en esta tarea, por la interpretación de la pregunta.


g. ¿Qué variables se están estudiando en esta situación? Explique el tiempo

En este caso el Estudiante E14 solamente identifica únicamente la variable tiempo y no reconoce la otra variable que es el porcentaje de carga. Sin embargo, a la hora de la socialización se le pregunta al E14 sobre su respuesta en esta pregunta ya que comete un error, pero a la hora de la entrevista se da cuenta del error cometido y logra dar respuesta a la pregunta.

Entrevistador: *¿puedes explicar con tus propias palabras de que trata la situación?*

E14*: ¿umm pues de encontrar cuánto dura en cargar mi celular?*

Entrevistador: *¿qué es lo que quieres encontrar?*

E14: *el tiempo que dura en cargar un celular*

Entrevistador: *¿qué relación hay entre el porcentaje de la carga y el tiempo?*

E14: *pues la carga sube cuando el tiempo corre*

Entrevistador: *cuáles magnitudes intervienen en la situación*

E14: *la fuente de poder, el tiempo, el porcentaje de carga*

Entrevistador: *cuales de esas magnitudes están variando*

E14: *el porcentaje de carga y el tiempo*

Entrevistador: ¿Qué permanece constante?

E14: *Pues la fuente de poder, pues yo no veo que cambie*

Entrevistador: *¿entonces, cuáles son las variables que intervienen en la situación?*

E14: *a ya el tiempo y la carga. Ummm me quedó mala la pregunta g*

Entrevistador: *lo importante es que ya entendiste.*

Según lo anterior, en lo concerniente al aspecto meta-cognitivo que podemos observar en esta respuesta, Santos (2007, p. 171) citando a Schoenfeld (1987) afirma que este aspecto se relaciona con el control o autorregulación que también se puede seguir o evaluar lo que se hace. El estudiante no se había percatado, pero a la hora de evaluar no con lápiz y papel sino con la entrevista logra identificar su error y solucionar.

En la segunda situación que se plantea en la primera parte de la hoja de trabajo, se presentan una serie de preguntas donde los estudiantes deben dar razón del rango y dominio de la función que modela esta situación y construir una gráfica asociada, las preguntas son:

- Elabore la gráfica tiempo - % Carga.
- Teniendo en cuenta esa gráfica obtenida, determine ¿cuál es el valor mínimo y máximo de la carga y del tiempo?

- ¿Qué puede decir del valor máximo que obtiene la carga con respecto a la situación?
- Según la gráfica ¿cuál es el tiempo que debe pasar para que la carga este en un 40%, 50%, 60%, 70%?
- ¿Cuál es la carga del celular cuando han transcurrido 60 minutos? Justifique su respuesta

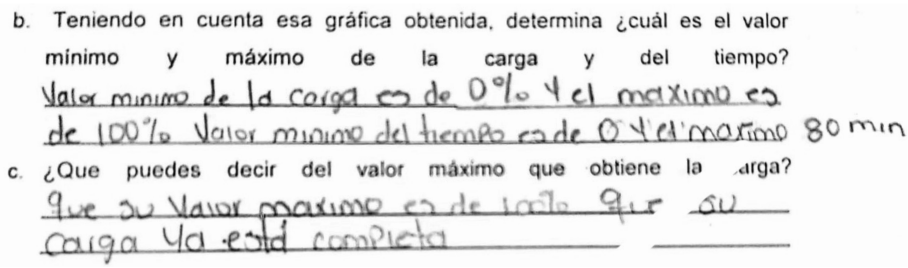
Al analizar algunas respuestas de la tarea 2 encontramos lo siguiente:

Por otra parte, en el respecto a la primera pregunta, en el curso de álgebra y funciones encontramos que la mayoría de los estudiantes ubican correctamente los puntos que corresponden al tiempo y el porcentaje de carga, pero al momento de construir la gráfica, estos puntos no obedecen a una gráfica "conocida" para ellos y entonces lo que hacen es construir una "curva" que tome todos los puntos. Ahora revisemos una de las respuestas para la segunda pregunta:

b. Teniendo en cuenta esa gráfica obtenida, determina ¿cuál es el valor mínimo y máximo de la carga y del tiempo? El valor mínimo para el tiempo es 0 min y el valor máximo 160 min; y en el caso de la carga el valor mínimo es 0% y el valor máximo es el 100%.

La mayoría de los estudiantes del curso de álgebra y funciones respondieron correctamente esta pregunta, definiendo el valor mínimo como el inicio de la actividad, es decir en el tiempo cero y con el celular con carga 0% y el valor máximo cuando se completa la carga del celular. Con respecto a los estudiantes de Institución Educativa Juan Ignacio, en la noción del rango de variación 23 de los 26 estudiantes (88,5%) es decir, la mayoría de los estudiantes logra identificar el punto mínimo y máximo de carga, expresan que el valor mínimo es 0% y el valor máximo es 100% y que ese valor máximo representa que el celular ya está completamente cargado. Logrando identificar que el par ordenado mínimo es (0,0) y el par ordenado máximo es (80,100), lo cual lo extrapolan a la gráfica realizada por ellos en GeoGebra.

En cuanto a la noción variación del dominio un 91,02% de los estudiantes de la IE reconocen que el dominio representa el tiempo que se emplea para cargar el celular y argumentan que el valor mínimo es 0 minutos y su valor máximo es 80 minutos. Además, en la socialización los estudiantes que no lograron responder correctamente esta pregunta al acercar uno de los compañeros la gráfica de GeoGebra en una presentación por video Beem un poco más, se dan cuenta del error que cometieron en lo que tenía que ver con el tiempo de carga del celular y al preguntárseles que si los puntos que tenían allí se podían unir, decían que si porque todas las temperaturas no eran números enteros, otros decían que si porque habían temperaturas y cargas con comas y otros decían esos números con comas se llaman decimales. Es decir que en cuanto a la continuidad de la gráfica un gran porcentaje tenían una idea de lo continuo y de lo discreto. En la siguiente figura se reporta el manuscrito de unos de los estudiantes.


b. Teniendo en cuenta esa gráfica obtenida, determina ¿cuál es el valor mínimo y máximo de la carga y del tiempo?
Valor minimo de la carga es de 0% y el maximo es de 100% Valor minimo del tiempo es de 0 y el maximo 80 min

c. ¿Que puedes decir del valor máximo que obtiene la carga?
que su Valor maximo es de 100% que su carga ya está completa

En cuanto a las magnitudes que intervienen en la situación los estudiantes logran identificar cuales varían, e identificar qué variable depende de qué variable y argumentaban en la socialización que la carga dependía del tiempo y que a medida el tiempo aumenta la carga también aumentaba.

En esta primera tarea los estudiantes desarrollan algunas estrategias, entre ellas navegar en el software GeoGebra que le permiten dar algunos argumentos de tipo matemáticos en sus explicaciones. En los estudiantes del curso de álgebra y funciones se encuentra un hecho que cabe la pena mencionar y es que cuando se les pregunta por máximos y mínimos después de haber construido la gráfica, algunos de los estudiantes revisan de nuevo la gráfica e intentan verificar si la gráfica correspondería a una parábola, esto porque la segunda y tercera pregunta les genera la idea de que el modelo podría ser una función cuadrática ya que les están preguntando por máximos y mínimos, a continuación un corto diálogo al respecto:

Estudiante: *Profesora, por favor revíseme la gráfica que acabo de construir, es que a mí me dio como una línea más o menos recta*

Entrevistador: *y ¿qué te hace pensar que la gráfica que construiste no corresponde?*

Estudiante: *que en la segunda pregunta me piden determinar el valor máximo y mínimo y si mal no recuerdo, eso se hacía cuando trabajábamos con la cuadrática, hallando el vértice.*

Entrevistador: *Para ti, ¿qué es un valor mínimo y qué es un valor máximo?*

Estudiante: *puessss el mínimo es el menor valor que se puede encontrar y así mismo el máximo es el mayor.*

Entrevistador: *y de acuerdo con eso, ¿solo en las funciones que tu mencionas existe ese valor? ¿En esta situación no hay un menor valor? ¿no se puede identificar?*

Estudiante: *ahh pues si profe, el menor valor sería cuando el tiempo es cero y el celular está muerto.*

Estudiante: *ah ya entiendo, lo que pasa profe es que no estoy acostumbrado a que me preguntes sobre el máximo en un contexto distinto a lo que tiene que ver con la cuadrática.*

Esta corta conversación que se tuvo con uno de los estudiantes del grupo de álgebra y funciones permite ver que en algunos casos, los estudiante no le dan sentido a las preguntas desde la situación problema, sino que buscan asociarlo inmediatamente con un tema en el que ya les hayan planteado preguntas similares, una de las razones por las que sucede es, en algunos casos, por la linealidad y secuencia que se trabaja en matemáticas alrededor de los contenidos, pero con poca conexión hacia las competencias matemáticas, es decir que los estudiantes solo hablan de valores máximos y mínimos cuando se trabaja con la función cuadrática y no se vuelve a hablar sobre valores máximos y mínimos en otro momento, entonces ellos quedan con la falsa idea que solo en las gráficas de las funciones cuadráticas es donde se pueden encontrar valores máximos y mínimos.

Análisis de actividad No. 2

La segunda parte de esta hoja de trabajo se tituló *Determinemos variaciones en las tablas y graficas*, esta parte busca promover el pensamiento variacional en los estudiantes a partir de revisar los pequeños cambios que se dan en una gráfica asociada a la situación problema de la carga del celular con respecto al tiempo. Entendiendo el pensamiento variacional como una

> Forma dinámica de pensar que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades, de la misma o distintas magnitudes, en los subprocesos recortados de la realidad (Vasco, 2006, págs. 9-155).

Esta segunda parte de la hoja de trabajo inicia presentando una gráfica que modela los datos de la situación problema en una gráfica, invitando al estudiante a que observe con detalle la gráfica y que conteste una serie de preguntas. Entre las preguntas que se proponen, está:

a. De la anterior gráfica propuesta por uno de los grupos toma las primeras dos parejas de puntos y determina las diferencias entre las abscisas, teniendo en cuenta que el eje *X* representa el tiempo. Observa qué tan separados quedan los puntos elegidos, y justifica tu respuesta.

b. Luego haz el mismo procedimiento de hallar las diferencias de las ordenadas, teniendo en cuenta que el eje *Y* representa el % carga. Observa qué tan separados quedan los puntos elegidos, y justifica tu respuesta. Aquí se invita al estudiante a que consigne los datos en una tabla.

c. ¿Qué información nos brinda cada uno de los puntos y las diferencias de la gráfica?

d. Teniendo en cuenta la gráfica, ¿la recta se corta, en qué punto y qué interpretación matemática podría dársele a dicho punto con respecto a la situación?

En el Anexo 1 se encuentra la hoja de trabajo que se menciona en este documento.

A continuación, se presenta el análisis general de los datos obtenidos a partir de las respuestas de los estudiantes:

TABLA —— 8
Distribución de los resultados de los estudiantes del Colegio Juan Ignacio en la segunda parte de la hoja de trabajo.

PREGUNTA	NIVELES			PORCENTAJE QUE CORRESPONDE AL NIVEL ESPERADO	DESVIACIÓN ESTANDAR
	INICIAL	PROCESO	ESPERADO		
	1	**2**	**3**		
a	6	0	20	84,61538462	22
b	8	5	13	73,07692308	19
c	5	3	18	83,33333333	21,6666667
d	8	9	9	67,94871795	17,6666667
e	6	1	19	83,33333333	21,6666667
f	5	13	8	70,51282051	18,3333333
g	10	1	15	73,07692308	19
h	16	5	5	52,56410256	13,6666667
i	3	9	14	80,76923077	21
j	8	5	13	73,07692308	19
PROMEDIO	28,846154	19,61538462	51,53846154	74,23076923	19,3
				CV	7,99587999

Fuente: elaboración propia

En la pregunta a y b que tiene que ver con la diferencia de ordenadas y abscisas, con respecto a la pregunta "a "un 84,61% de los estudiantes y en lo que respecta a la pregunta "b" un 73,07% de los estudiantes de la IE Juan Ignacio, logra realizar esta pregunta completando la tabla reconociendo que la diferencia de las abscisas tiene que ver con el cambio del tiempo y el de las ordenas con el cambio en las cargas. La mayoría se clasificaron en el nivel esperado con respecto a las preguntas a y b, entre los aspectos a señalar, esta que la indicación con respecto a que calcularan la diferencia entre las abscisas y la diferencia entre

TABLA 9
Distribución de los resultados de los estudiantes del curso álgebra y funciones en la segunda parte de la hoja de trabajo

PREGUNTA	NIVELES			PORCENTAJE QUE CORRESPONDE AL NIVEL ESPERADO	DESVIACIÓN ESTANDAR
	INICIAL	PROCESO	ESPERADO		
a	2	1	18	86	9,5
b	1	1	19	90	10,4
c	3	3	15	71	6,9
d	2	5	14	67	6,2
e	3	3	15	71	6,9
f	2	2	17	81	8,7
g	0	3	18	86	9,6
h	1	1	19	90	10,4
i	1	1	19	90	10,4
j	3	2	16	76	7,8
PROMEDIO	2	2	17	81	8,7
				C.V	10,7

Fuente: elaboración propia

las ordenadas permite que el estudiante comprenda lo que se les está solicitando y dé una respuesta correcta, a diferencia de lo que sucede cuando se le indica que calcule o , pues esta notación no tiene sentido para los estudiantes. Cabe aclarar que al solicitarle a los estudiantes que consignen en la tabla las parejas de puntos y las diferencias, se les hace la siguiente indicación.

> Recuerda que: a las diferencias de las abscisas entre dos puntos se le llama Δx a las diferencias de las ordenas entre dos puntos se le llama

Esto permite que se instauren nuevos conceptos a partir de una exploración inicial partiendo de calcular las diferencias, en las tablas se observa que, con las indicaciones, los estudiantes se apropian con más facilidad de la notación .

Los estudiantes de ambas instituciones están cargados de argumentos alrededor de que las diferencias de abscisas representan cambios en los tiempos y las diferencias de las ordenas representan cambios en las cargas, la mayoría de los estudiantes expresan que esas diferencias de tiempos son iguales a 0.8 minutos que indica que entre un punto y otro punto los separa esa cantidad y las de las cargas es 1% y que las cargas van aumentando de 1 en 1. En cuanto a recursos, los estudiantes cuentan con algoritmos, fórmulas para dar respuesta a las preguntas y usan diferentes heurísticas para argumentar; adicionalmente, con la ayuda de GeoGebra tienen la oportunidad de explorar, manipular y llegar a algunas conclusiones acerca del comportamiento de los valores que toma x, y al moverse por toda la gráfica descubrieron en la socialización que de un punto a otro punto el tiempo era igual y lo mismo el porcentaje de carga, es decir que había una razón de cambio constante entre estas dos magnitudes. En la socialización argumentan que la carga va de uno en uno y que se demora 0.8 minutos para hacer ese cambio.

Cabe señalar que un 23% de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio no logra determinar las diferencias de abscisas (tiempo), ordenada (carga) y no identifica de manera correcta lo que significan esas diferencias en la situación. No identifica el uso de una estrategia en particular que se ajuste al problema, el siguiente manuscrito representa un ejemplo de esta respuesta (Tabla 10).

Estos estudiantes no están realizando un monitoreo activo de regulación y orquestación de las decisiones y proceso utilizados en lo que concierne al resolver un problema como lo plantea (Santos 2008 p.59). No se percatan en las diferencias que está sucediendo ni los resultados que están arrojando.

Uno de los aspectos importantes en esta tarea es la cuantificación de los cambios con respecto al cambio de las magnitudes involucradas tiempo-porcentaje de carga, de ambas instituciones, un 70% de los estudiantes en la pregunta f logran identificar que la carga cambia 1% cada 0.8 minutos, se dan cuenta que se está preguntando por cuánto (cantidad de tiempo) cambia la carga a medida que el tiempo pasa, la siguiente figura ilustra un ejemplo de la respuesta a la pregunta (Tabla 11).

En lo que respecta al cociente incremental expresado por un estudiante en la Tabla anterior, se analiza que un 63,25% de los estudiantes evidencian o utilizan recursos y heurísticas pertinentes, estos estudiantes

TABLA —— 10

Respuesta de uno de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio

Parejas de puntos	$\Delta x = Diferencias\ de\ Abscisas\ (x_2 - x_1)$	$\Delta y = Diferencias\ de\ ordenadas\ (y_2 - y_1)$
(0;0) (08.1)	Δx= 08 - 0 = 8	Δy= 1-0 = 1
(16·2) (24·3)	Δx= 24-16 = 8	Δy= 2-1 = 1
(32·4) (40,5)	Δx= 4 - 32 = - 28	Δy= 3-2 = 1
(48·6) (56·5)	Δx= 56 - 48 = 8	Δy= 4-3 = 1
(64·6) (79,7)	Δx= 79 - 64 = 15	Δy= 5-4 = 1
(8 ,9) (89,10)	Δ= 89 - 8 = 81	Δy= 6-5 = 1

Tabla 2

d. ¿Qué información nos brinda cada uno de los puntos y las diferencias de la gráfica? es que el tiempo va aumentando 4%

TABLA —— 11

Respuesta de uno de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio

Parejas de puntos	$\Delta x = Diferencias\ de\ Abscisas$	$\Delta y = Diferencias\ de\ ordenadas$	$cociente\ Incremental = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
(0 . 0) (0.8 . 1)	Δx = 0,8 - 0 = 0.8	Δy = 1 - 0 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$
(1.6 . 2) (2.4 . 3)	Δx = 2.4 - 1.6 = 0,8	Δy = 3 - 2 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$
(3.2 . 4) (4 . 5)	Δx = 4 - 3.2 = 0.8	Δy = 5 - 4 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$
(4.8 . 6) (5.6 . 7)	Δx = 5.6 - 4.8 = 0.8	Δy = 7 - 6 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$
(6.4 . 8) (7.2 . 9)	Δx = 7.2 - 6.4 = 0.8	Δy = 9 - 8 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$
(8 . 10) (8.8 . 11)	Δx = 8.8 - 8 = 0.8	Δy = 11 - 10 = 1	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{0.8} = 1,25$

Tabla 3

a. Describe ¿cómo cambia el % de carga con respecto a la unidad de tiempo? Por 0.8 minutos de tiempo la carga aumenta a 1%

logran reconocer que este cociente incremental que describe que el cambio de la carga del celular era de 1,25 por unidad de tiempo, es decir que por 1% cambio de carga ocurría 0.8 cambio en la unidad de tiempo.

Al momento de la socialización, se llega a la conclusión, en ambas instituciones educativas, que algunos estudiantes no logran dar razón sobre este cambio como un cociente incremental, aspecto que se fortalecerá en la hoja de trabajo número 2. Cabe aclarar que un pequeño grupo de estos estudiantes logra identificar que matemáticamente ese cociente incremental sería la pendiente de la ecuación que representa el tiempo que tardaría un celular.

A continuación, se presentan dos diálogos tomados de la socialización con estudiantes:

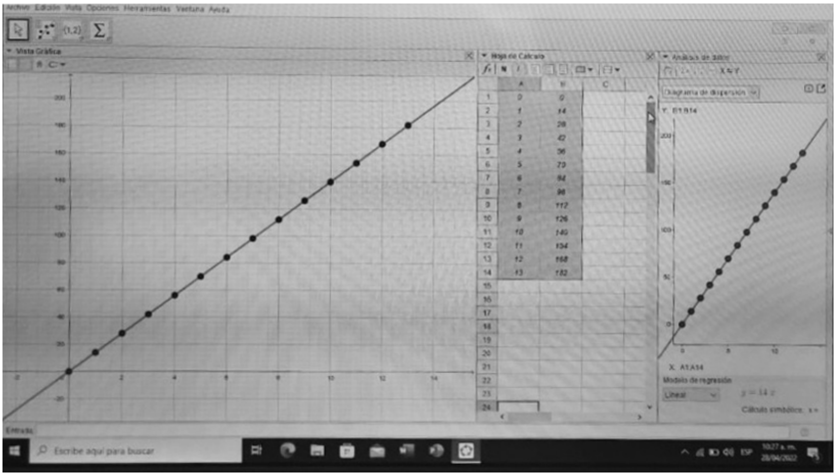
> ***Entrevistador****: después de analizar la tabla, ¿conoces alguna relación que se establezca entre los elementos que encontraste en la tabla?*
>
> ***Estudiante****: Yo veo que cuando aumenta una, aumenta la otra.*
>
> ***Entrevistador****: ¿Qué otras características observas?*
>
> ***Estudiante****: la división entre esas dos cantidades siempre da el mismo resultado, esto se denomina cociente incremental.*
>
> ***Estudiante****: Ahh y la forma como se hace esta división es la misma forma en como se hace la de hallar la pendiente.*
>
> ***Estudiante****: porque coincide con la formula cuando uno busca la pendiente de una recta.*

Análisis De Actividad No. 3. Con respecto a esta tarea, que tiene como objetivo la representación algebraica que se propone como modelo a la situación, al hacer la gráfica en GeoGebra se observa que más de la mitad de los estudiantes de ambas instituciones logran graficar y hacen uso de la herramienta “ajuste lineal” para mirar cuál es la ecuación que modela el tiempo de carga de su celular.

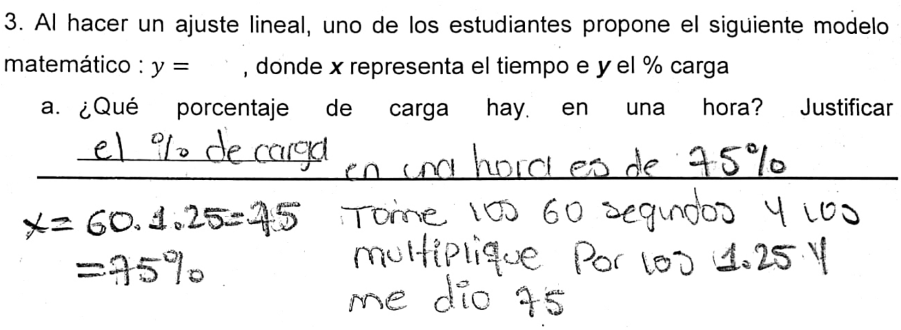
En lo que tiene que ver con respecto del por qué la continuidad de la recta en esa gráfica, algunos argumentaban que porque se puede buscar la carga de un celular en un tiempo de 25,5 minutos ya que el tiempo sigue y sigue y podemos hallarlo para números decimales.

FIGURA —— 3

Respuesta del ajuste lineal que realizó uno de los estudiantes



En cuanto a la pregunta de la actividad No. 3: ¿Qué porcentaje de carga hay en una hora? Haciendo uso de un modelo matemático propuesto por un estudiante donde %C= 1.25t (donde c es la carga y t el tiempo), se logra observar que un 70.05% del total de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio lograron hacer uso del algoritmo para dar cuenta de la pregunta. En la siguiente figura se presenta la respuesta de un estudiante de la Institución Educativa Juan Ignacio:



3. Al hacer un ajuste lineal, uno de los estudiantes propone el siguiente modelo matemático : $y =$, donde x representa el tiempo e y el % carga

a. ¿Qué porcentaje de carga hay en una hora? Justificar

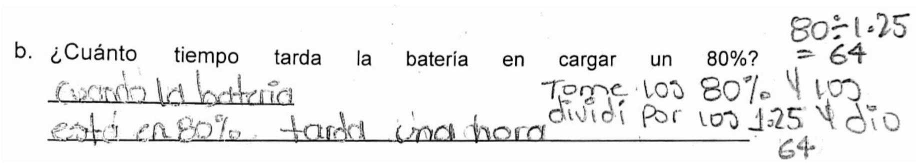
el % de carga en una hora es de 75%

x= 60. 1.25=75
=75%

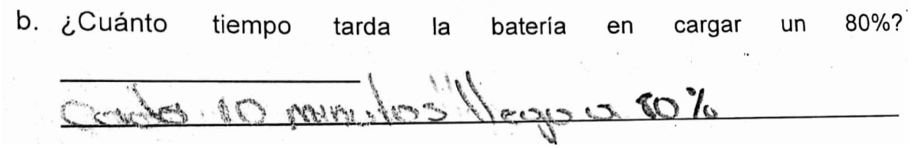
Tome los 60 segundos y los multiplique Por los 1.25 y me dio 75

Cabe señalar que a la hora de la socialización los estudiantes argumentaban que este resultado se podía observar en la gráfica en GeoGebra cuando el tiempo era 60 min la carga era 48% y que podía representar en el par ordenado (60, 48) y así lo ubicaban en el software, se observa que, en general, los estudiantes no solo hacen uso de una sola forma de representación de la función lineal. Peo vale la pena notar que un 29.55% de estudiantes no lograron darle respuesta a esta pregunta haciendo uso de la expresión algebraica, pero un compañero propuso que empezara en la gráfica a ubicar el 60 en la abscisa y allí le daba el valor.

Al finalizar la socialización, estos estudiantes lograron darle respuesta a esta pregunta y expresaban que, para hallar la carga del celular del compañero, se podría hacer multiplicando 1.25 por el tiempo que se quiera. Además, se le propone al estudiante en la pregunta b ¿cuánto tiempo tarda en cargar un celular un 80%? Se encuentra que un 50.2% de estudiantes logra dar respuesta a esta pregunta, el siguiente manuscrito es la respuesta del E25


b. ¿Cuánto tiempo tarda la batería en cargar un 80%?
$80 \div 1.25 = 64$
cuando la batería está en 80% tarda una hora
Tome los 80% y los dividí por los 1.25 y dio 64

Se observa que se le fue más fácil responde la pregunta a, los estudiantes no identifican la estrategia para darle solución a la pregunta, no hay monitoreo de las decisiones que se toman para dar respuestas a las preguntas por parte de los estudiantes.


b. ¿Cuánto tiempo tarda la batería en cargar un 80%?
Cada 10 minutos llego a 80%

A la hora de la plenaria, los alumnos validan la información y además tratan de llegar a conclusiones de acuerdo con el conocimiento matemático que poseen, es decir al momento de la socialización los estudiantes que no pudieron responder la pregunta b, lograron exponer un discurso que daba pautas sobre la compresión de la situación.

En cuanto los estudiantes del curso de álgebra y funciones, se evidencia un manejo óptimo de la herramienta GeoGebra, cabe señalar que esta era la primera vez que realizaban ajustes lineales haciendo uso de GeoGebra y que hasta el momento solo se había utilizado GeoGebra como herramienta de validación de algunos conceptos matemáticos como sistemas de ecuaciones lineales, construcción de funciones, construcción de figuras geométricas, a pesar de esto, fue fácil que llegarán a la construcción de la recta que se ajusta a los datos. Fue sorpresa para los estudiantes encontrar que se podía determinar la función que más se ajusta a los datos y que en algunos casos no corresponde a una línea recta sino a una función exponencial, logarítmica o a una polinómica. Los estudiantes reflexionaron sobre en qué casos es útil hacer ajustes por aproximación, en este caso, un ajuste lineal, esta reflexión, que se dio naturalmente en el salón de clases, permitió llevar a los estudiantes a entender las competencias que se fortalecen cuando se trabaja con problemas en contextos reales, ya que estos permiten, en algunos casos, como este, obtener datos que no obedecen del todo a funciones, pero que, haciendo algunas aproximaciones, se comportarán como estas. Las preguntas que se proponían en la actividad No. 3 fueron respondidas correctamente por el 80% del grupo y las estrategias que utilizaron fueron similares, en la mayoría de los casos continuaron haciendo validaciones y exploraciones en GeoGebra que les permitiera llegar a la respuesta. Por ejemplo, en la pregunta: ¿Qué porcentaje de carga hay en una hora? Los estudiantes escribieron la función en la vista algebraica y seguidamente calcularon f(1), aunque este procedimiento se hubiese podido hacer a mano y es casi inmediato, es importante notar cómo a partir de involucrar GeoGebra para realizar cierta actividad, ellos empiezan a considerarlo para el resto de preguntas que se proponen.

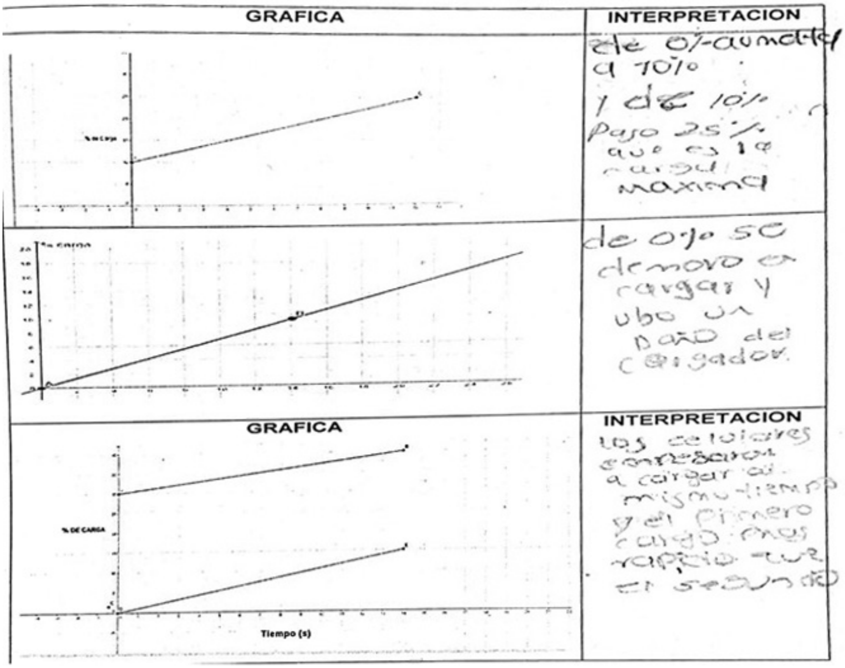
Las preguntas: ¿Cuál es el tiempo en que tarda la batería en cargar 10% a 20%, de 20% a 30% de 40% a 50% y de 50% a 70% y de 70% a 90%? Qué hizo, que puede concluir y ¿Qué relación matemática tiene el número obtenido en los cocientes con la ecuación? Permitieron generar una interacción entre los compañeros, ya que ellos empiezan a buscar en sus conocimientos previos a qué corresponde esta relación, es así como la mayoría de ellos, empiezan a acercarse a la definición de pendiente de una recta, pero no como casi siempre se hace: desde la fórmula, sino desde el concepto asociado una razón de cambio que permanece constante.

Análisis de actividad No. 4

Esta actividad evalúa la habilidad de realizar la lectura de gráficas de ecuaciones lineales, la cual está relacionada con la competencia de representar y modelar y propone que en una situación problema, la modelación permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son estos respecto a las condiciones iniciales. Dada una gráfica de una función lineal, donde en el eje X se ubica el tiempo y en el eje Y se ubica el porcentaje de carga de un celular, la tarea consiste en hacer una interpretación de dicha gráfica utilizando el leguaje natural. La tarea contenía cuatro preguntas. En términos generales se encontró que el rendimiento en ambos grupos, tanto el del grupo de la Institución Educativa Juan Ignacio como el grupo de estudiantes de primer semestre de la Universidad Icesi, es del 73% que permite evidenciar un avance de los estudiantes en su proceso de aprendizaje, con respecto a las otras actividades. Asimismo, encontramos que la Desviación típica es de 7,65 y el coeficiente de variabilidad es de 10,47.

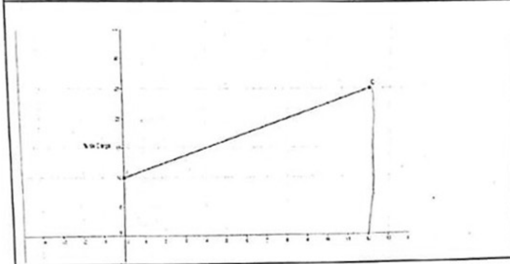
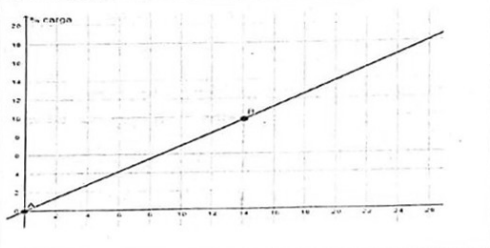
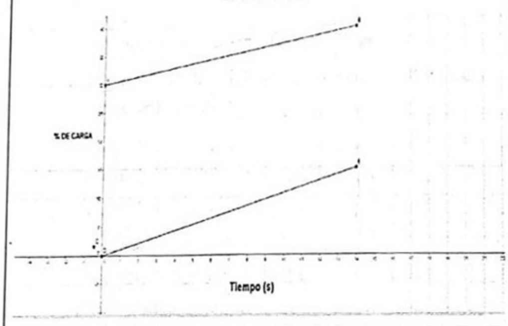
En las dos primeras preguntas corresponden a la interpretación de gráficas de la carga de un celular a medida que pasa el tiempo. Las preguntas tres y cuatro corresponden a la interpretación de las gráficas de dos celulares a medida que pasa el tiempo. Estas dos últimas tareas tienen un mayor grado de dificultad.

A continuación, se muestran manuscritos originales de los estudiantes utilizando las categorías: inicial (no respondieron acertadamente ninguna interpretación gráfica), en proceso (hicieron bien algunas interpretaciones gráficas) y esperado (hicieron adecuadamente todas las cuatro interpretaciones gráficas). En la categoría inicial se ubica el 16,3 % de los estudiantes. El estudiante E2 contesta a la pregunta número 1 de la siguiente manera:

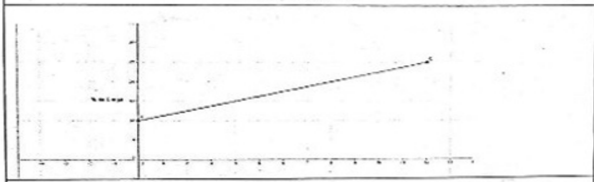
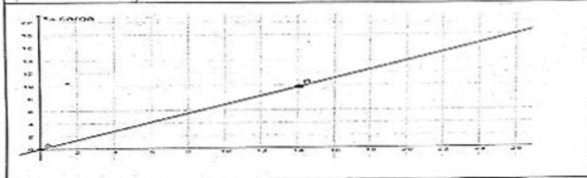
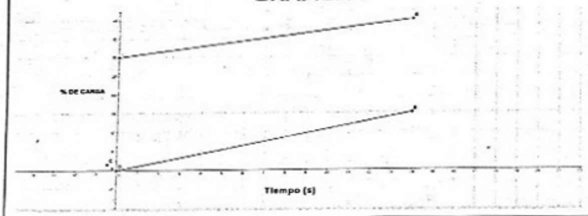


En la gráfica 1 el estudiante comete varios errores: en su lectura confunde el porcentaje inicial con la carga inicial. Además, dice que la carga disminuye, cuando en la realidad está aumentando. Estos errores son una evidencia del poco manejo de recursos (origen, variable independiente, variable dependiente, pendiente) y además son indicador de poco desarrollo de las habilidades de control, porque el estudiante comete errores y no los logra identificar. Asimismo, se observa poco desarrollo de las habilidades heurísticas que para este caso implica hacer una lectura de gráficas.

En proceso nos encontramos que un 19,23% de los estudiantes de la Institución Educativa Juan Ignacio hicieron algunas interpretaciones gráficas de manera acertada, el estudiante responde de la siguiente manera: la gráfica 1 y 2 interpreta de manera acertada, pero la gráfica tres no responde de manera acertada:

GRAFICA	INTERPRETACION
	la Carga inicio en 10% y en 12mn Pasa a 25%
	El celular inicia en 0 y a los 14mn Pasa 10%.
GRAFICA	**INTERPRETACION**
	El celular inicia en 10 y a los 14mr Pasa a 30

Con respecto a la gráfica, un gran porcentaje de los estudiantes hace la lectura de las diferentes gráficas identificando el punto de corte como el tiempo en que arranca el celular a cargar, además identifican en las dos gráficas dónde aparecen dos celulares cargando en las que son paralelas que argumentan que un celular arrancó en un tiempo t = 0 minutos con una carga de 0% y el otro con una carga del 30%

GRAFICA	INTERPRETACION
	cuando el celular arranca a cargar empieza en 10% despue de 12 minutos el celular está en 25%
	el celular arranca en 0% Luego de 14 minutos el celular subió a 10%
GRAFICA	**INTERPRETACION**
	el celular (B) arranca en 30% despues de 14 minutos subió a 40% el celular (A) arranca en 0% y despues de 14 minutos subió a 15%

CONSIDERACIONES FINALES

A continuación, se presentan las consideraciones finales a partir del análisis que se realizó en conjunto de los resultados comunes que se dieron con los estudiantes de ambas instituciones educativas como también aquellas diferencias que se presentaron:

- Por medio de esta actividad se pudo evidenciar lo que se había señalado en el documento en los aspectos teóricos y es que es de suma importancia proponer a los estudiantes actividades en las que el enfoque sea de resolución de problemas y preferiblemente en contexto real, ya que esto permite conectar la atención y el interés del estudiante desde el principio de la actividad y permite llevarlo hacia la formalización de los conceptos matemáticos de una forma más natural, haciendo uso de sus conocimientos previos, la intuición y propiciando los cambios, representaciones articuladas y contextualizadas, en este caso, del concepto de función, de dominio y de rango. Retomando este último aspecto, el uso de múltiples representaciones como las numéricas, las visuales y las algebraicas se convirtieron en una estrategia heurística para la resolución de las actividades.

- Utilizar material manipulativo y usar el software GeoGebra permitió a los alumnos hacer uso de sus sentidos para el desarrollo y la adquisición de recursos, sin limitarse solamente a la oralidad, sino que se encuentran otros caminos o estrategias para el razonamiento, la argumentación y la ejecución para lo que se les pedía justificaciones en la hoja de trabajo, ya que esto se podía ver claro a la hora de interactuar dinámicamente con el software, pues podían llegar a conjeturas, argumentos y hacer conclusiones que con el lápiz y papel no lo hacían. En otras palabras, la interacción que se genera entre GeoGebra, el estudiante, mediada por las orientaciones y preguntas que se proponen en las hojas de trabajo, potencian las competencias como la de comunicar y argumentar.

- Igualmente se encontró que la mayoría de los estudiantes, inmersos en esta propuesta metodológica, adquirieron la habilidad para comunicar sus ideas en una notación matemática clara. Una de las dificultades que se encuentran en un curso habitual de matemática básica es la apropiación por parte del estudiante del lenguaje matemático, es decir el manejo correcto de símbolos y signos matemáticos con un sentido y significado claro para el estudiante. En este sentido, se evidencia una ganancia con esta metodología de trabajo: dado que los estudiantes debían manejar lenguaje matemático para realizar sus construcciones con GeoGebra, como también se les presentó notación matemáticas en las hojas de trabajo, es así como surgió la necesidad natural en ellos de apropiarse de este lenguaje. Al finalizar la actividad se observa que los estudiantes utilizan símbolos matemáticos como un lenguaje natural para comunicar sus ideas, pero además que este lenguaje tiene sentido para ellos.

- Esta hoja de trabajo propició la participación de los estudiantes, la socialización de sus hallazgos, razonar y comprender algunos aspectos que caracterizan la función lineal (pendiente, rango, punto de corte, etc.) y las observaciones hechas por los participantes permitió el autocontrol en algunos planteamientos al responder preguntas. Cabe señalar que la hoja de trabajo puede sufrir cambios en el transcurso de su aplicación, es decir, la hoja de trabajo estaba sujeta y se fue adaptando de acuerdo a las respuestas de los estudiantes. En el diagnóstico inicial se evidenció que los estudiantes tenían dificultades en el manejo de recurso y estrategias. El desarrollo de la hoja de trabajo tuvo un impacto positivo en el desempeño cualitativo y cuantitativo de los estudiantes.

REFERENCIAS

ÁLVAREZ , H., Avello Martínez , R. & López , R. (2014). Los entornos virtuales de aprendizaje como recurso didáctico en el ámbito universitario. *Revista Universidad y Sociedad, 5(1)*.

BENÍTEZ, D. (2006). *Formas de razonamiento que desarrollan los estudiantes con el uso de tecnologías*. [Tesis Doctoral]. Mexico: Cinvestav.

BENÍTEZ, D. & Santos, L. (2003). Herramientas Tecnológicas en el Desarrollo de Sistemas de representación para la solución de problemas. *Perfile educativo*, 23-41.

CONSEJO NACIONAL DE PROFESORES NCTM. (2000). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación.*

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Kluwer Academic Publishers.

GÓMEZ, R. E. (2020). *Plan de Desarrollo Municipal 2020-2023.* Villa Rica - Cauca: Concejo municipal del municipio de Villa Rica.

GUZMÁN, M. D. (1992). *El Paper del matemàtic enfront els problemes de l’educació matemàtica.* Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques.

HITT, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Asociación matemática venezolana, X*(2), 213-224.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACIÓN. (2007). *Saber Pro, Módulo de Competencias genéricas.*

INSTITUTO COLOMBIANO PARA LA EVALUACIÓN DE LA EDUCACION ICFES. (2016). *Módulo de razonamiento cuantitativo saber TyT.*

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). *Lineamientos curriculares.* MEN.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). *Estándares Básicos de competencias.*

POLYA, G. (1945). *How to solve it?*

SANTOS, L. M. & Moreno, L. (2001). De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática. 78-97.

SANTOS, L. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Trillas,47-169

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

UNIVERSIDAD ICESI. (2004). *Ética a través del currículo.* Universidad Icesi.

VASCO, C. E. (2006). Didáctica de las Matemáticas. *Artículos Selectos*, 9-155.

SOBRE LOS AUTORES

DAVID BENÍTEZ MOJICA

Profesor de tiempo completo en la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. Licenciado en Matemáticas y Física, por la Universidad del Tolima, Ibagué-Tolima; magíster en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CINVESTAV-México y doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa del CINVESTAV-México. Ha escrito varios artículos de investigación en la línea de resolución de problemas de matemáticas con la mediación de tecnologías digitales. Obtuvo el premio clase 2010 por el instituto para el fomento de la investigación educativa (IFIE) en México por sus trabajos relacionados con el desarrollo de competencias disciplinares de matemáticas. Ha sido parte del grupo académico que ha liderado el diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje con fundamento en la resolución de problemas y con la mediación de tecnologías digitales.
Correo electrónico: david.benitez@correounivalle.edu.co

HENDEL YAKER AGUDELO

Licenciado en Matemática y Física, por la Universidad del Valle, Cali-Valle del Cauca; magíster en matemáticas de la Universidad del Valle. Miembro fundador del Instituto GeoGebra de Cali (IG Cali), con el cual viene trabajando desde 2015 en diferentes procesos de investigación en educación matemática y de ejecución de proyectos orientados al desarrollo profesional de los docentes de matemáticas en la región del Valle del Cauca. Hace parte del grupo académico que lidera el diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje con fundamento en la resolución de problemas y con la mediación de tecnologías digitales, en representación del IG Cali y del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Icesi.
Correo electrónico: hyaker@icesi.edu.co

HENRY TÁQUEZ

Profesor del departamento de pedagogía de la Escuela de Ciencias de la Educación y Coordinador del área de educación y TIC del Centro

de Recursos para el Aprendizaje de la Universidad Icesi, donde lidera procesos de formación docente y la gestión de proyectos educativos mediados por las Tecnologías de la Información y la comunicación (TIC). Hace parte del grupo de investigación IRTA Investigación en Recursos y Tecnologías para el Aprendizaje de la misma universidad. Sus actuales intereses de investigación están en el aprendizaje activo, los entornos virtuales de aprendizaje, la gestión de la innovación educativa y el desarrollo profesional docente.
Máster en Sociedad de la Información y el Conocimiento con énfasis en e-learning por la Universidad Abierta de Cataluña de Barcelona - España, especialista en Sistemas Gerenciales de Ingeniería con énfasis en Gerencia Informática de la Pontificia Universidad Javeriana Cali e ingeniero de sistemas de la Universidad del Valle.
Correo de contacto: hataquez@icesi.edu.co

EDILMA QUICENO MESA

Docente de Preescolar del sector oficial del Distrito de Santiago de Cali, labora en la Institución Educativa Técnica de Comercio Simón Rodríguez, actualmente pertenece al Grupo de investigación CILEE (Cali Investiga Lee y Escribe). Licenciada en Educación preescolar de la Universidad del Quindío, con tres especializaciones: Especialista en Educación y Orientación Familiar de la Fundación Universitaria Monserrate de Bogotá D.C, Especialista en informática y Multimedios de la Fundación Universitaria Libertadores de Bogotá D.C y Especialista en Tecnología en informática de la universidad Virtual de Santander, (CVUDES). Ha realizado dos Maestrías, la primera en Gestión de la Tecnología Educativa del Centro de Educación Virtual de la Universidad de Santander y la segunda en Educación con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle.
Correo: equime69@gmail.com

YOLANDA GIRÓN COLORADO

Maestra de primaria del Colegio Berchmans desde hace 15 años; licenciada en Educación Preescolar de la Universidad de Manizales. Ha realizado los diplomados: Diseño de ambientes de aprendizaje con fundamento en la resolución de problemas, con la mediación de tecnologías digitales

y Diplomado en integración de las TIC en las prácticas pedagógicas. Actualmente participa en el grado tercero, en la implementación de proyectos interdisciplinares desde la integración de las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Sociales y Educación religiosa.
Correo electrónico: yolanda.giron@berchmans.edu.co

LILIANA MARGARITA PLAZA LAFAURIE

Maestra de primaria del Colegio Berchmans desde hace 23 años; licenciada en Educación Preescolar de la Universidad de San Buenaventura. Realizó el diplomado: Diseño de ambientes de aprendizaje con fundamento en la resolución de problemas, con la mediación de tecnologías digitales. Actualmente participa en el grado tercero, en la implementación de proyectos interdisciplinares desde la integración de las áreas de Matemáticas, Lenguaje, Sociales y Educación religiosa.
Correo electrónico: liliana.plaza@berchmans.edu.co

LUIS ALBERTO MOSQUERA TORRES

Profesor de tiempo completo del Colegio Berchmans de la ciudad de Cali por los últimos 15 años, en los sectores de primaria y bachillerato. Estudió licenciatura en matemáticas y física en la Universidad del Valle. En su proceso de formación hizo parte de la línea de lenguaje, razonamiento y comunicación de conocimientos y saberes matemáticas, del área de educación matemática de la Universidad, como asistente de investigación. Ha participado en procesos de formación continua con la Universidad ICESI y el Instituto GeoGebra Cali.
Correo: luis.mosquera@berchmans.edu.co

YENNY CIFUENTES BOCANEGRA

Profesora con nombramiento oficial de la Secretaría de Educación de Cali y docente de primaria de la Institución Educativa Libardo Madrid Valderrama de la misma ciudad. Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle. Magister en Educación de la Universidad Icesi y egresada del Diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje basados en solución de problemas matemáticos y

mediados con tecnología. Participante de “Experiencias significativas e innovaciones pedagógicas de las instituciones educativas oficiales del municipio de Cali 2019.
Correo: yenny2815@hotmail.com

YARI CARIME RIASCOS MOSCOSO

Profesora con nombramiento oficial de la Secretaría de Educación de Cali y docente de primaria de la Institución Educativa José Manuel Saavedra Galindo, sede Nuestra Señora de Fátima de la ciudad de Cali. Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad Santiago de Cali. Magister en Educación de la Universidad Icesi y egresada del Diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje basados en solución de problemas matemáticos y mediados con tecnología.
Correo: yaricarime@hotmail.es

MANUEL ALBERTO MARINEZ CASTILLO

Profesor de tiempo completo durante seis años del colegio Berchmans. Durante este tiempo ayudó, con apoyo del departamento de Matemáticas de la Institución, a desarrollar los fundamentos del pensamiento aleatorio y estadístico del área de Matemáticas de la institución. Esto, con el objetivo de que los estudiantes desarrollaran una cultura de pensamiento estadístico. Licenciado en Matemáticas y Física por la Universidad del Valle; Magíster en Educación Matemática por la Universidad del Valle.
Correo: mmarinezc@gmail.com

JULIÁN ENRIQUE CÓRDOBA CASTRILLÓN

Profesor de matemáticas del colegio Berchmans, egresado de la Universidad Santiago de Cali con el título de Licenciado en Básica con Énfasis en Matemáticas. Actualmente desempeña la misión de coordinador del área de matemáticas del colegio. Es titulado también como Normalista Superior en el año 2003, su trabajo lo ha dedicado a los procesos de enseñanza en el sector escolar, participando como docente y directivo, haciendo parte también del proceso de acompañamiento a estudiantes que participan en las olimpiadas de matemáticas a nivel nacional.
Correo electrónico: julian.cordoba@berchmans.edu.co

HEVER MARÍN

Profesor de tiempo completo en el Colegio Berchmans-compañía de Jesús-Cali. Es licenciado en matemáticas y física por la universidad del Valle, Cali; Ingeniero de sistemas por la universidad Santiago de Cali, Actualmente se desempeña como profesor de física y está desarrollando el proyecto Makerslab Berchmans, donde se busca implementar la impresión 3D en el aula de clase.
Correo: hever.marin@berchmans.edu.co

YENI MARCELA BETANCUR ARISTIZÁBAL

Profesora del colegio Berchmans, en la ciudad de Cali. Licenciada en educación básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, Magister en la Enseñanza de las ciencias exactas y naturales de la Universidad Nacional, sede Medellín.
Correo: yeni.betancur@berchmans.edu.co

URBANO RENGIFO HERNÁNDEZ

Profesor de tiempo completo en el Colegio Berchmans de Cali. Licenciado en Educación con especialidad en Matemáticas por la Universidad Santiago de Cali; Especialista en Educación Matemáticas por la Universidad del Valle.
Correo: urbano.rengifo@berchmans.edu.co

NATALIA AMU MANCILLA

Egresada de la Institución educativa PBRO Horacio Gómez Gallo; Estudiante de pregrado de Licenciatura Básica con Énfasis en Matemática en la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali-Valle del Cauca. Monitora de docencia en la Facultad de Educación y Pedagogía. Asistió al V SEMINARIO sobre el uso de las TIC en los procesos de Enseñanza-Aprendizaje. Diseño de tareas basado en herramientas digitales. Ha realizado diferentes cursos de pedagogía que ofrece el SENA y también he realizado diferentes diplomados con el fin de complementar mi formación profesional.
Correo: natalia.amu@correounivalle.edu.co

JENNY CAROLINA CHOCO P

Egresada de la institución educativa Fundación Santa Isabel de Hungría; estudiante de pregrado del programa Licenciatura en Básica con énfasis en Educación matemática en la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del valle, Cali-Valle del Cauca, Colombia. Asistí al taller seminario de Formación de líderes Innovadores Ofrecido por Profuturo. Asistió al V Seminario sobre el uso de las TIC en los procesos de Enseñanza-Aprendizaje. Diseño de Tareas basado en herramientas Digitales. Cursé los programas de educación continua Asesoría para el uso de las TIC en la formación, Estrategias Pedagógicas Para el Desarrollo del Pensamiento, ofrecido por el Sena.
Correo: jenny.choco@correounivalle.edu.co

DIANA MARCELA ESCOBAR MUÑOZ

Egresada de la Institución Educativa Joaquín de Cayzedo y Cuero, Cali. Profesora de tiempo completo en el Colegio Franciscano de Pío XII. Licenciada en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle, Cali. Creadora del emprendimiento Max Math-Juegos didácticos.
Correo electrónico: escobar.diana@correounivalle.edu.co

ELENA FREIRE-GARD

Profesora de Didáctica de la Matemática en el Instituto de Profesores Artigas de Montevideo y en el Profesorado Semipresencial de Uruguay. Profesora de Matemática de Educación Media egresada del Instituto de Profesores Artigas de Montevideo; Magíster en Matemática en Ciencias en Matemática Educativa (Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, México D.F.), Magíster en Educación (Universidad Internacional Interoamericana, Campeche, México). Se encuentra cursando el Doctorado en Matemática Educativa en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria (México, D.F.). Obtuvo el premio al mejor desempeño académico en la maestría en Matemática en Ciencias en Matemática Educativa (reconocimiento realizado por el Instituto Politécnico Nacional, México D.F, 2018).

CINTYA GONZALES HERNÁNDEZ

Doctoranda en Didáctica de las matemáticas de la Universidad Pública de Navarra. Magíster en Enseñanza de las Matemáticas por la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Matemática egresada de la Universidad Nacional Federico Villarreal. Miembro del Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP). Trabaja en las líneas de investigación de competencia didáctico-matemático de profesores y de epistemología y secuencias didácticas, donde investiga herramientas para determinar condiciones que favorecen el proceso de difusión del conocimiento matemático. Docente del área de Ciencias en la PUCP y en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas.
correo electrónico: cintya.gonzales@pucp.pe

ONEIDA QUIROGA GONZÁLEZ

Actualmente trabaja como docente en el colegio los Naranjos, Institución Educativa de la comunidad hermanos Maristas, Bogotá Colombia, cuenta con 18 años de experiencia como docente, dirige el área de matemática y contribuye en la elaboración o ajustes a la malla curricular. Egresada de la universidad Francisco de Paula Santander, obteniendo el título de licencia en matemáticas. Realizó el diplomado en ambientes de aprendizaje basados en la solución de problemas matemáticos y mediados con las tecnologías en la Universidad ICESI con la cooperación del instituto Cali GeoGebra.
Realizó un diplomado en pedagogía conceptual, con la fundación Alberto Merani.
Correo electrónico: oneida.quiroga1302@gmail.com

PAULA ANDREA GONZALEZ PARRA

Profesora de tiempo completo del departamento de matemáticas y estadística de la Universidad Autónoma de Occidente. Licenciada en matemática y física y maestría en matemática de la Universidad del Valle. Maestría y doctorado en ciencias computacionales de la universidad de Texas en El Paso. Hace parte del grupo de investigación en modelación y simulación de la universidad autónoma de occidente, trabajando especialmente en modelos matemáticos en epidemiología. Participó en el

Diplomado en diseño de ambientes de aprendizaje basados en la solución de problemas matemáticos y mediados con tecnologías.
Correo electrónico: pagonzalez@uao.edu.co

LINA ESPERANZA SOTO ARCHILA

Licenciada en matemáticas de la Universidad Industrial de Santander (UIS), realizó dos diplomados: uno en Docencia Universitaria en la Universidad Pontificia Bolivariana de Bucaramanga y el otro en Diseños de Ambientes de aprendizaje. Profesora de tiempo completo en el colegio San Pedro Claver de Bucaramanga, en el área de matemáticas.
Correo electrónico: lina.soto@sanpedro.edu.co

YASMÍN YOHANA GARCÍA

Licenciada en matemáticas y física de la Universidad del Valle, Magister en educación de la Universidad del Valle, especialista en docencia Universitaria de la Universidad Icesi.
Docente con más de 10 años de experiencia en los niveles medio y superior, ha dirigido tesis de trabajo de grado de estudiantes de licenciaturas y maestrías en educación con énfasis en historia y epistemología y didáctica de las matemáticas. Preocupada especialmente por acompañar los procesos educativos con proyectos de aplicabilidad en ciencias y otras áreas del saber, buscando que los estudiantes exploren de manera significativa sus habilidades y competencias
Correo Electrónico: yasmin.garcia@u.icesi.edu.co,

YENNI MINA MOSQUERA

Profesora nombrada en propiedad en la Institución Educativa Juan Ignacio por el Ministerio de Educación Nacional en el departamento del Cauca. Licenciada en Matemáticas y Física, de la Universidad del Valle en Santiago de Cali; magíster en Educación con énfasis en Matemática de la Universidad del Valle. Mi tesis para optar al título de magister fue en la línea de resolución de problemas de matemáticas con la mediación de tecnologías digitales.
yenni.mina@correounivalle.edu.co

SANDRA LORENA CHAVARRÍA

Egresada de la Normal Superior Farallones de Cali, Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle y Magister en Educación Matemática de La Universidad del Valle. Experiencia docente en universidades de la región: Universidad del Valle, Universidad Autónoma de Occidente y Universidad Icesi, en los cursos de matemáticas y educación matemática. Actualmente es profesora tiempo completo del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Icesi, donde coordina al equipo de profesores de los cursos de Álgebra y Funciones y Álgebra Lineal. Pertenece al Instituto GeoGebra de Cali y ha participado en investigaciones en ambientes de aprendizaje mediados por tecnologías digitales como GeoGebra, MatLab, entre otros.

Correo Electrónico: sandra.chavarria@u.icesi.edu.co

OTROS TÍTULOS DE LA COLECCIÓN

— **Caso por caso: clínica y lazo social**
XIMENA CASTRO-SARDI (EDITORA ACADÉMICA)
DOI: https://doi.org/10.18046/EUI/disc.3.2020

— **Fundamentos para la evaluación y manejo de la vía aérea**
IVÁN FERNANDO QUINTERO CIFUENTES
DOI: https://doi.org/10.18046/EUI/disc.2.2020

— **Herramientas financieras y valoración de activos y pasivos financieros bajo NIIF**
LUIS BERNARDO TELLO R.
DOI: https://doi.org/10.18046/EUI/disc.1.2019

Este libro se terminó de editar en octubre de 2023.
En su preparación, realizada desde la Editorial
Universidad Icesi, se emplearon tipos Asap en 10/14.

Colección Discernir

9 786287 630178

El libro *Experiencias significativas en educación matemática*, puede resultar de interés para profesores de matemáticas, investigadores educativos, autoridades escolares y formadores de profesores de matemáticas, porque puede constituirse en fuente de inspiración para el diseño e implementación de actividades de aprendizaje de las matemáticas, mediadas con tecnologías digitales, para promover el desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático.

EDITORES

Un aprendizaje que, desde las matemáticas, contribuya a que los estudiantes desarrollen distintas habilidades de orden superior como la proposición y resolución de problemas, la modelación matemática, la abstracción, la representación desde diferentes registros semióticos (identificación, tratamiento, conversión), todo ello apelando a distintas estrategias cognitivas (memoria, interpretación, análisis síntesis, etc.), metacognitivas (sentido, apropiación y valoración del propio aprendizaje) y, no menos importante, atendiendo al sistema de creencias. Las investigaciones y acciones que los docentes consignan en este libro, dan cuenta de ello. Y en todas estas dimensiones cognitivas, metacognitivas y valorativas el texto que tenemos entre manos hace aportes interesantes

ANA LUCÍA PAZ RUEDA

GEOGEBRA INSTITUTO CALI
Editorial Universidad Icesi
UNIVERSIDAD ICESI