UNIVERSIDAD ICESI — Departamento de Matemáticas y Estadística

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES. Grupo 05 Profesor: Hendel Yaker A.

PRIMER EXAMEN PARCIAL 12 de septiembre de 2006

1. (12 puntos) Considere las siguientes ecuaciones en el espacio: $S_1 : z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}\,;\quad S_2 : x + z = 4$

   (a) Identifique y bosqueje gráficamente la superficie S_1.

   (b) Parametrice la **curva** de intersección de las superficies S_1 y S_2 y encuentre el vector director de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 0, 3)$.

   (c) Encuentre una fórmula para el vector director descrito en el ítem anterior, utilizando las propiedades de los **gradientes** y los **conjuntos de nivel** de las funciones de varias variables. (NO evalúe la fórmula)

2. (12 Puntos) Considere la función $f(x, y) = 1 - \sqrt{x - 2y^2}$.

   (a) Identifique el dominio y el codominio de f y haga una representación gráfica del dominio.

   (b) En un **mapa de contorno** identifique la curva de nivel que pasa por el punto $(4, 0)$ y utilice el vector ∇f para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en $(4, 0)$.

   (c) Utilice las propiedades de los **gradientes** en el espacio para determinar la ecuación del plano tangente a la **gráfica de** f en el punto $(4, 0, -1)$.

3. (12 puntos) En cada uno de los siguientes casos utilice la información que se suministra para calcular la derivada que se pide:

   (a) $z = x \tan^{-1}(xy);\quad x = t^2$ y $y = se^t;\quad ¿\dfrac{\partial z}{\partial t} = ?$

   (b) $f(x, y) = \displaystyle\int_{x^y}^{y^x} \tan^{-1} t\, dt;\quad ¿\frac{\partial f}{\partial x} = ?$

   (c) $u = f(x, y),\quad x = e^s \cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t;\quad ¿\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ?$

4. (12 puntos) En cada uno de los siguientes casos determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero explique por qué. Si es falso explique por qué o de un ejemplo que lo refute.

(a) La curva $r(t) = (2\cos t + 2,\ \sqrt{2},\ 4\text{sen}t - 1)$ está contenida en un **cono** cuyo eje de simetría es paralelo al eje $\mathbf{y}$.

(b) Si la proyección de un punto P sobre el plano yz pertenece a la recta $r(t) = (2 + t,\ t,\ t/2)$ se puede concluir que la distancia de P al eje $\mathbf{x}$ es de $\sqrt{5}$ unidades.

(c) Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas, de la cual se sabe que en el punto $A(1, 2)$ el mínimo valor de la derivada direccional es de -5 y ocurre en dirección hacia el punto $B(7, 10)$. Esta información es suficiente para poder calcular la **derivada direccional** de f en A en dirección hacia cualquier punto conocido B.

(d) Si f es una función tal que $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$, entonces f es **continua** en $(0,0)$.

5. (10 puntos) Pruebe que la función $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua y las derivadas parciales f_x y f_y existen en el origen, pero sus derivadas direccionales en **todas** las demás direcciones **no existen**.

NOTA: Se califica sobre 50 puntos.