ANOTACIONES HISTORICAS SOBRE LOS ORIGENES DEL SIMBOLISMO DE LA LOGICA MATEMATICA

George Boole, uno de sus precursores modernos

HENRY ARANGO D.

Ingeniero Electromecánico de la Universidad del Valle; M.Sc. en Ingeniería Eléctrica de The Stanford University; Magister (C) en Ingeniería Industrial y Sistemas de la Universidad del Valle. Profesor y directivo académico/administrativo en la Facultad de Ingeniería de Univalle. Gerente de Sistemas del Banco Popular y Vicepresidente de la misma Institución Bancaria. Asesor externo para el Banco Mundial y para Price Waterhouse Office of Government Services en Washington. Gerente y socio principal de Arango y León Consultores Ltda., firma dedicada a la asesoría y consultoría en proyectos de información gerenciales. Decano de Sistemas del ICESI. Director de la Especialización en Gerencia de Sistemas de Información del ICESI.

INTRODUCCION

La Lógica es tan antigua como la existencia del hombre. Es intrínseca a su propia naturaleza y se ha desarrollado en el hombre al ritmo de su propia evolución.

Fue Aristóteles, no obstante, quien primero "sistematizó" las ideas relativas a la lógica como una disciplina filosófica respecto a los pensamientos y que cristalizó en su célebre obra "El Organon". A partir de Aristóteles, quien profundizó en la lógica deductiva y demostrativa, los estudios de la Lógica proliferaron, así como las variantes o especializaciones sobre la propia lógica. La historia muestra los trabajos de F. Bacon sobre la lógica de la investigación y de la inducción. La lógica normativista, la metodológica, la idealista, la materialista (base del marxismo), etc., y la lógica o logística matemática.

Me he interesado, por alguna razón personal, en conocer algo sobre los orígenes del simbolismo formal de esta última, y en particular, sobre los desarrollos de George Boole. ¿Por qué sobre Boole?, nos preguntaremos. Simplemente por la influencia que ha tenido en la historia de los computadores y en sus modernas aplicaciones sobre la Inteligencia Artificial.

El escrito que se muestra a continuación es una pequeña recopilación sobre qué fue lo que hizo el señor Boole. Se muestra al final la poca bibliografía consultada –pero satisfactoria para mis propósitos– que en buena parte transcribo, omitiendo las "comillas", para presentar el escrito de una manera más fluida.

ABC: Amigo XYZ, a los estudiantes de Ingeniería, y en particular a los de Ingeniería de Sistemas, se les enseña el álgebra de Boole y con el uso de esta álgebra se construyen una cantidad de principios básicos para entender cómo funcionan los computadores. ¿Dime, quién fue el señor Boole?

XYZ: Correcto, el álgebra booleana es casi una constante para un ingeniero de sistemas y como tú lo mencionas es la base para entender el funcionamiento de los computadores electrónicos y, más aún, también la base o la semilla, en lo que a simbolismos se refiere, para lo que hoy tanto se investiga sobre la aplicación de los computadores en áreas tan interesantes como la Inteligencia Artificial.

Te cuento. George Boole fue un matemático inglés, nacido en Lincoln en 1815 y a quien se considera como el segundo fundador de la lógica simbólica. Fue prácticamente un autodidacta y a la temprana edad de dieciséis años empezó su carrera de profesor como auxiliar de cátedra en Duncaster; más adelante fundó su propia escuela privada en su ciudad natal, hasta que en 1849 se ganó el nombramiento de catedrático titular de matemáticas en el Queen's College de Cork. Murió en esta misma ciudad, el 8 de diciembre de 1864.

Su primera publicación importante la presentó en 1847 con el título "Mathematical Analysis of Logic". Esta obra lo hizo conocer en el mundo de las matemáticas y por coincidencia apareció el mismo día que otro gran matemático de la época y también dedicado a estudiar los problemas de la lógica Augusto De-Morgan, publicará su obra "Formal Logic".

En 1853 y ya como profesor en el Queen's College publicó otro libro más extenso que llamó "An Investigation of The Laws of Thought on which are founded the mathematical Theories of logic and Probabilities" conocido más comúnmente como "The Laws of Thought".

ABC: Sí, efectivamente, he visto muchas referencias a este libro, que parece que no fue un libro muy extenso, como tú mencionas, pero al cual se refieren muchos autores Bertrand Russell, entre ellos, se atrevió a afirmar: "la matemática pura ha sido descubierta por Boole en una obra a la que tituló The Laws of Thought". Posiblemente esta afirmación del señor Russell sea una exageración, pero indica el impacto que en su época tuvo el trabajo de Boole.

XYZ: Así es. Y fíjate en algo interesante. Boole comienza su libro "The Laws of Thought", expresando:

"La intención del siguiente tratado es investigar las leyes fundamentales de aquellas operaciones del pensamiento por medio de las cuales se realiza el razonamiento; darles una expresión con el lenguaje *simbólico* del Cálculo, y con este fundamento establecer la ciencia de la Lógica y construir su método; hacer de ese método la base de otro método general para la aplicación de la doctrina matemática de las Probabilidades; y finalmente, deducir de los diversos elementos de la verdad obtenidos durante el transcurso de estas investigaciones ciertos indicios probables, concernientes a la naturaleza y constitución de la mente humana".

ABC: ¡Qué interesante! Déjame pensar un poco más sobre esa última frase: "... y finalmente, deducir de los diversos elementos de la verdad obtenidos durante el transcurso de estas investigaciones ciertos indicios probables, concernientes a la naturaleza y constitución de la mente humana". Todo un precursor de ideas, ¿no te parece?

XYZ: Claro que sí. ¿Cuándo iba a pensar Boole que con sus simbolismos estaría fundamentando la operación y construcción de los computadores? ¿Y qué sembraría una semilla para el futuro simbolismo que ha permitido los desarrollos en Inteligencia Artificial? Posiblemente no fue el primero que incursionó en los campos de la lógica (Aristóteles y otros...) pero sí fue quien primero se atrevió a expresar sus reglas mediante un simbolismo con formulaciones matemáticas.

ABC: El mismo Bertrand Russell afirma "... Un buen simbolismo tiene una tal sutileza y ejerce una sugestión tal que a veces parece como un maestro vivo".

XYZ: Te sigo contando acerca del señor Boole para que más adelante entremos en detalles sobre los aspectos de lógica.

Boole incursionó también en el campo del cálculo, con unos primeros trabajos sobre los invariantes algebraicos (publicados en el Cambridge Mathematical Journal, 1841 y 1842) como parte de la geometría algebraica que hace relación con la transformación de una figura en otra por medio de transformaciones lineales que preservan algunas de las propiedades de la primera.

Los invariantes, como tú recuerdas, se refieren a las propiedades geométricas invariantes en la transformación de las figuras, y de allí su nombre. Estos trabajos dieron lugar a que otros matemáticos de la época (Arthur Cayley, James Joseph Sylvester y George Salmon) profundizaran tanto sobre ello que los empezaran a llamar la "trinidad de los invariantes".

Publicó Boole otras dos obras sobre cálculo; "Treatise on Differential Equations" (1859) y "Treatise on the Calculus of finite differences" (1860).

Sin embargo, la mayor contribución de Boole, y que se extiende hasta nuestros días, fue todo lo relacionado con el establecimiento de un simbolismo para el álgebra de la lógica que permitió el que las operaciones de tipo matemático se aplicaran por primera vez de modo sistemático y logrado a la lógica.

ABC: ¿Tienes algunas anécdotas acerca de su personalidad?

XYZ: Sí. Boole era un autodidacta y en todas sus obras mostró una gran independencia de pensamiento. Esta independencia se reflejó también en sus opiniones religiosas y costumbres sociales. Rechazaba todo lo que tuviera que ver con las clases religiosas. A tal extremo llegó que uno de sus últimos deseos antes de morir fue "que se impidiera que sus hijos cayeran en manos de personas consideradas religiosas".

La gente humilde de su vecindario lo consideraba como un "inocente al que no hay que hacer daño" y entre las personas de clase alta era admirado como "una especie de santo extravagante".

Si en un tren o en una tienda encontraba a alguien cuya conversación le interesara, le invitaba a su casa a "mirar por el telescopio y a hablar de ciencia", aunque su mujer se molestara por la tropa de visitas así reclutadas por Boole.

Cuando algo se le metía en la cabeza era muy difícil disuadirlo. Típico en este sentido fue su comportamiento durante su última enfermedad. "Cogió un enfriamiento que dio en neumonía, y entonces insistió en llamar un médico que acababa de ser destituido de una cátedra de medicina en el Quenn's College por cierta irregularidad de conducta. Lo hizo para manifestar amistad y complacer a un hombre que estaba en desgracia".

ABC: Bien por toda esta historia. Pero entremos en materia.

XYZ: OK. Te entiendo. El enfoque de Boole fue el de enfatizar la lógica extensional, que es una lógica de clases, en donde un conjunto de clases las simbolizó como **x, y, z,...** mientras los símbolos **X, Y, Z,...** representan los miembros individuales.

ABC: ¿Cómo así: ¿Qué es una "clase"? Está bien que entres en materia... pero despacio, ¡por favor!

XYZ: ¡Otra vez, OK! Y no me vayas a regañar por la frecuencia en el uso del OK. ¿No es un anglicismo ya aceptado en nuestra lengua? Te explicó: *"clase"* en este contexto se refiere al conjunto de entes, seres, etc. que tienen algo en común como para identificarlos como tales. Una "clase", por ejemplo, es el conjunto de los hombres y mujeres nacidos en Colombia. Tienen en común el haber nacido en Colombia. A estas "clases" fue que Boole las simbolizó como **x.** Un colombiano en particular, Pedro Pérez, por ejemplo, sería un **X.**

ABC: Bien. Ahora sí voy precisando tus explicaciones.

XYZ: Son simples, realmente, vistas ahora casi 150 años después que fueron formuladas. Boole definió, o mejor, simbolizó dos clases muy importantes: la clase universal, como la clase que lo tiene **"todo"** con el símbolo **1** y a la clase **"vacía"** o **"nula"**, como la clase que no tiene **nada,** con **0** Y estos **0**'s y **1**'s han tenido gran trascendencia.

ABC: Muy bien, otra vez. ¿Y qué más?

XYZ: Boole estructuró sus ideas en tres principios fundamentales. Ellos fueron:
1. La idea de la operación de "elección" y de "símbolos electivos".

2. Las "leyes del pensamiento" expresables como reglas de operación sobre esos símbolos y,

3. La observación de que esas reglas de operación son las mismas que valdrían en álgebra respecto de los números 0 y 1.

A partir de estas ideas, Boole...

ABC: ¡Un momento...! Un momento... Volvamos a conversar más despacio... Antes de seguir adelante, explícame con ejemplos las tres ideas de Boole.

XYZ: Tienes razón. Lo intentaré. Por lo demás, verás que son muy simples –entendidas bajo nuestra cultura de 1990–. No olvidemos que fueron formuladas hace 150 años como te dije anteriormente. Hasta aquella época los conceptos e ideas de la lógica se expresaban de manera verbal y no simbólica.

Con respecto al primer punto, la "elección" se refiere al hecho de determinar con la suficiente claridad cuál es la "clase" con la que se va a trabajar y los "símbolos electivos" corresponden a los **x, y, z** que antes vimos.

Bolle insiste en que se debe precisar muy bien la "clase" antes de asignarle un símbolo electivo.

Así entonces el símbolo electivo **x** representa el resultado de elegir todos los **x** del universo. Por lo tanto los **x, y, z,...** son los símbolos de clases como resultado de una operación de selección.

Aplicando las reglas de operación sobre estos símbolos, comenzó a formular las "leyes del pensamiento". Por ejemplo, el símbolo **xy** lo utilizó para simbolizar la intersección de dos clases; es decir, para indicar el conjunto de elementos que son comunes tanto a **x** como a **y**. En el lenguaje de Boole **xy** no se lee **"x por y"**, sino **"x intersección y"**.

En cuanto al punto (3) se deduce parcialmente de la notación anterior. La intersección de la clase **x** con el **todo** es la misma clase **x.** En el simbolismo de Boole.

$\mathbf{x}.\ \mathbf{1} = x$

Y la intersección de la clase **x** con la clase **nula** o **vacía** es la clase **nula:**

x. 0 = 0

Estos dos simbolismos de una formulación lógica conservan las reglas matemáticas del 0 y el 1. Es decir, **"X por 1 = x"** y **"x por 0 = 0".**

ABC: *Bien, ahora sí me quedaron claras las tres ideas fundamentales del simbolismo de Boole.*

XYZ: Sigamos y verás lo interesante de cómo se conservan algunas propiedades del álgebra simple. Por ejemplo, la propiedad conmutativa de la multiplicación se conserva igual en la notación de Boole:

xy = yx

Su demostración es axiomática. Es obvio que si seleccionamos primero los **x** y después los **y,**los **xy** serán los mismos que si primero seleccionamos los **y** y después los **x.** La intersección será el mismo conjunto, es decir **xy = yx.**

Aplicando la lógica al simbolismo se demuestra entonces que **x. x = x.** Es claro, al elegir todos los **x** y luego, a partir de la clase obtenida por esa selección, elegir de nuevo todos los **x**, se obtiene nuevamente la clase de los **x.**

Definió la relación de inclusión. Es decir, que si **x** está contenido en **y,** entonces **xy = x.**

¿Lo puedes demostrar?

ABC: *Trataré. Si la clase **x** está contenida en **y, x** es parte de **y**. Por lo tanto, la intersección de **x** con **y** es la misma **x.***

XYZ: Muy bien. De paso, algunos años después a los trabajos de Boole, John Venn "inventó" unos gráficos para representar este manejo de los conjuntos y que permiten "visualizar" la lógica envuelta en ellos. Son los conocidos diagramas de Venn que hoy en día estudian los niños en la escuela primaria.

ABC: *¡Qué interesante! ¡No conocía el origen de los tales diagramas de Venn!*

XYZ: Continuemos. Boole simbolizó **x + y** para indicar el conjunto consistente de todos los elementos que están en **x "o"** en **y** pero no en ambos a la vez. El operador "+" en este caso tiene significado de letra **"o".** La operación **x + y** es también conmutativa:

x + y = y + x

y su demostración axiomática.

En su simbolismo la expresión **z(x + y)** es también asociativa respecto a la multiplicación:

z(x + y) = zx + zy

El complemento de **x** lo simboliza como **1 – x.** Es decir, los elementos del conjunto que **"no están en x"** son **"el todo menos los que están en x".** Lo que Boole no definió fue un símbolo para expresar el "complemento de x".

Hasta aquí, y con estos principios o notaciones lógicas, se puede demostrar fácilmente que:

0 + 0 = 0

El conjunto de todos los elementos que están en **"nada"** o en **"nada"** pero no en ambos a la vez es **"nada".**

Y así mismo:

1 + 1 = 0

Boole creía que la mente nos entrega a nosotros ciertos procesos elementales de razonamiento que son los axiomas de la lógica. Por ejemplo, la ley de contradicción es axiomática:**A** no puede ser al mismo tiempo igual a **B** y no igual a **B**. Se expresa así:

x(1–x) = 0

El signo "–" lo utiliza para expresar la operación de "excepción". Si la clase **x** es "hombres" y la clase **y** "asiáticos", **x – y** será "todos los hombres que no son asiáticos".

En la operación de "excepción" la multiplicación es también asociativa con respecto a la sustracción:

z(x – y) = zx – zy

Cada **X** es **Y** lo representa por **x(1 – y)**

$= 0$. Ningún **X** está en **Y** lo simboliza como $xy = 0$. Algunos **X** son **Y** como $xy = 0$; y algunos **X** no están en **Y** como $x(1 - y) = 0$.

ABC: ¿Cómo es aquello de que el mundo de Boole está entre 0 y 1?

XYZ: Es debido a las propias definiciones que hizo Boole sobre la clase **0** y la clase **1**. Si la clase **1** es el todo, no hay nada más allá de **1**. Por lo tanto los números 2, 3, 4... etc., no tienen sentido en el simbolismo de Boole.

ABC: Bien amigo XYZ, gracias por esta corta charla. Me has ayudado a recordar estos aspectos. Sólo me faltaría preguntarte, ¿qué pasó después de Boole?

XYZ: Mucho. Primero se le buscaron y encontraron inconsistencias. Algunas de ellas, no obstante, las identificó el mismo Boole y formuló notaciones por "definición" para precisar sus simbolismos en pro de los axiomas de la lógica. Boole incursionó un tanto en la lógica proposicional...

Sin embargo, sus simbolismos trascendieron a la crítica hasta que ésta terminó por aceptarlos, usarlos, y continuar construyendo simbolismos basados en principios algebraicos para "modelar" los principios de la lógica. ¡Los que se usan hoy en día, amigo **ABC,** son realmente complejos para un neófito como yo!

Tengo un amigo en ICESI experto en estos temas. Le solicitaré que nos vaya explicando toda esta evolución, de una manera didáctica, hasta concluir en su procesamiento computarizado para dar lugar a lo que se conoce como Inteligencia Artificial en el área de los Sistemas, con la ayuda de los computadores.

ABC: Ya te entiendo. Si los razonamientos de la lógica se pueden "formular" mediante la utilización de "simbolismos" que obedezcan a algunas leyes de tipo algebraico y aunque no a todas y aunque haya que formularles su propia álgebra, sí es factible "computarizarlas" como para que el algorítmo resultante sea estructurado y produzca resultados ciertos.

XYZ: OK. Y gracias por tu paciencia.

BIBLIOGRAFIA

Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.

James R. Newman, SIGMA: *El Mundo de las Matemáticas*. Vol. 5. Ediciones Grijalbo S.A.

Richard N. Schmidt, William E. Meyers, *Técnicas Informáticas Hoy*. Vol. 1. Editorial Paraninfo.

UTEHA: *Enciclopedia Universal*.

SALVAT: *Enciclopedia Universal*.