UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL. 25 de mayo de 2010

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ______________

PROFESOR: ______________________________ GRUPO: ______________

NOTA: SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.

1. .
   (a) (6 puntos) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,2)$ y es paralela a la recta obtenida al interceptar los planos $x+y+z=0$ y $3x-y+z=0$.
   (b) Sea π el plano que contiene los puntos $A(0,1,1)$, $B(1,1,0)$ y $C(1,3,1)$, y sea L la recta que contiene el punto $P(1,2,5)$ y es ortogonal al plano π.
      i. (4 puntos) Escriba la ecuación del plano π.
      ii. (3 puntos) Escriba la ecuación de la recta L.
      iii. (3 puntos) Encuentre el punto de intersección entre el plano π y la recta L.

2. (20 puntos) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Diagonalice ortogonalmente la matriz A encontrando una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $D = P^{-1}AP$.

3. Sea $L: \mathbf{R^3} \to \mathbf{P_2}$ una transformación lineal tal que : $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t^2,\ L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1+t,\ L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1-t^2$
   .
   (a) (6 puntos) Calcule $L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
   (b) (6 puntos) Encuentre la matriz de L referida a las bases canónicas.
   (c) (6 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L y una base para la imagen de L .
   (d) (4 puntos) ¿$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \in Nu(L)$? ¿$5t^2 - t + 6 \in Im(L)$?
   (e) (4 puntos) ¿L es inyectiva? ¿L es sobreyectiva?

4. (8 puntos) Seleccione y responda una (solo una) de las siguientes preguntas:

(a) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos $(-2,5),(1,1)$ y $(2,-4)$

(b) Identifique la cónica y una forma cuadrática $h(x,y)$ equivalente a la forma cuadrática $g(x,y) = 5x^2+4xy+2y^2 = 9$.

5. (35 puntos) Analice si los enunciados siguientes son ciertos (haga una demostración) o falsos (de un contraejemplo) .

(a) Si A es una matriz ortogonal y simétrica entonces $\left(A+A^{-1}\right)^{-1} = \frac{1}{2}A$

(b) Si A es una matriz de $n \times n$ entonce A y A^T tienen los mismos valores propios.

(c) Si $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de $\mathbf{R}^3$, entonces $gen\{\mathbf{u},\mathbf{v}\} = gen\{\mathbf{u}\}$.

(d) Si A es una matriz de 2×2 invertible, entonces A es diagonalizable.

(e) Sea $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una transformación lineal definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Si A es invertible entonces L es inyectiva (uno a uno).