



UNIVERSIDAD
ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de
Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL
EXAMEN FINAL

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos.

SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

1. Considere la función $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$L(x, y, z, w) = (x + y + z + w, x + y - z, y + 2z - w)$$

- (6 pts) Muestre que L es una transformación lineal. Encuentre una matriz que represente a la transformación lineal L .
- (7 pts) Encuentre una base para el *nucleo*(L). Justifique su elección.
- (5 pts) Encuentre una base para la *imagen*(L). Justifique su elección.
- (4 pts) Calcule el *rango*(L) y la *nulidad*(L).
- (4 pts) ¿Es L una transformación lineal uno a uno? ¿Es L una transformación lineal sobre? Justifique su respuesta.
- (6 pts) Determine si el vector $(1, 1, -1, -1) \in \text{Nucleo}(L)$. Determine si el vector $(1, 1, 1) \in \text{Imagen}(L)$. Justifique su respuesta.

2. Considere la siguiente matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2).$$

- (4 pts) ¿Es A una matriz singular o no singular? Justifique su respuesta.
 - (14 pts) Diagonalice ortogonalmente la matriz A . Escriba la matriz diagonal D y la matriz ortogonal P , tales que $D = P^T A P$.
3. (20 pts) Considere los siguientes puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, -1, 1)$ y $R(0, 1, 1)$.
- Encuentre la ecuación del plano π_1 que contiene a los puntos P , Q y R .
 - Verifique que el punto $A(1, 0, 1)$ no pertenece al plano π_1 . Encuentre la ecuación de un plano π_2 paralelo al plano π_1 que pase por el punto $A(1, 0, 1)$.
 - Calcule la distancia entre los planos π_1 y π_2 .

4. (16 ptos)

- a) Sea A una matriz 6×4 , sustente por qué el conjunto formado por las filas de A es un conjunto linealmente dependiente. De una condición necesaria para que el conjunto formado por las columnas de la misma matriz A , formen un conjunto linealmente independiente. Justifique su respuesta.
- b) Considere la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$ definida por $T(a, b, c) = ct^2 + (a - b)t + (b + c)$. Explique por qué T es un isomorfismo entre \mathbb{R}^3 y P_2 .
- c) Suponga que B es una matriz simétrica de 6×6 . Si todos los valores propios de la matriz B tienen multiplicidad algebraica 2, ¿cuál es la multiplicidad geométrica asociada al espacio propio de cada valor propio?
- d) Sea $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ una base para el espacio vectorial W . Verifique que $\{[w_1]_S, [w_2]_S, \dots, [w_n]_S\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^n .

5. (24 puntos)

- a) Sean u y v soluciones del sistema lineal homogéneo $Ax = 0$. Muestre que cualquier combinación lineal de u y v es también solución del mismo sistema homogéneo.
- b) Demuestre que si el sistema $Ax = b$, $b \neq 0$ tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.
- c) Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V . Sea $W_1 + W_2 = \{v \in V : v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Muestre que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V .
- d) Sea A una matriz $n \times n$. Demuestre que $\det A$ es igual al producto de los valores propios de A .

6. (10 puntos) Elija y resuelva uno y sólo uno de los siguientes items.

- a) Argumente por qué la matriz $T = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,60 & 0,40 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix}$ puede considerarse una matriz de transición regular de un proceso de Markov y encuentre el vector de estado estacionario para dicha matriz T .
- b) Determine una forma cuadrática h equivalente a la forma cuadrática $g(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 10yz$.