



UNIVERSIDAD  
**ICESI**

Facultad de Ingeniería  
Departamento de  
Matemáticas y Estadística

**ALGEBRA LINEAL**  
**EXAMEN FINAL**

NOMBRE: \_\_\_\_\_ CÓDIGO: \_\_\_\_\_

PROFESOR: \_\_\_\_\_ GRUPO: \_\_\_\_\_

NOTA: El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos.

SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

1. Considere la función  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$L(x, y, z, w) = (x + y + z + w, x + y - z, y + 2z - w)$$

- (6 pts) Muestre que  $L$  es una transformación lineal. Encuentre una matriz que represente a la transformación lineal  $L$ .
- (7 pts) Encuentre una base para el *nucleo*( $L$ ). Justifique su elección.
- (5 pts) Encuentre una base para la *imagen*( $L$ ). Justifique su elección.
- (4 pts) Calcule el *rango*( $L$ ) y la *nulidad*( $L$ ).
- (4 pts) ¿Es  $L$  una transformación lineal uno a uno? ¿Es  $L$  una transformación lineal sobre? Justifique su respuesta.
- (6 pts) Determine si el vector  $(1, 1, -1, -1) \in \text{Nucleo}(L)$ . Determine si el vector  $(1, 1, 1) \in \text{Imagen}(L)$ . Justifique su respuesta.

2. Considere la siguiente matriz  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , cuyo polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda + 2)(\lambda - 2).$$

- (4 pts) ¿Es  $A$  una matriz singular o no singular? Justifique su respuesta.
  - (14 pts) Diagonalice ortogonalmente la matriz  $A$ . Escriba la matriz diagonal  $D$  y la matriz ortogonal  $P$ , tales que  $D = P^T A P$ .
3. (20 pts) Considere los siguientes puntos  $P(1, 1, 0)$ ,  $Q(-1, -1, 1)$  y  $R(0, 1, 1)$ .
- Encuentre la ecuación del plano  $\pi_1$  que contiene a los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ .
  - Verifique que el punto  $A(1, 0, 1)$  no pertenece al plano  $\pi_1$ . Encuentre la ecuación de un plano  $\pi_2$  paralelo al plano  $\pi_1$  que pase por el punto  $A(1, 0, 1)$ .
  - Calcule la distancia entre los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

4. (16 ptos)

- a) Sea  $A$  una matriz  $6 \times 4$ , sustente por qué el conjunto formado por las filas de  $A$  es un conjunto linealmente dependiente. De una condición necesaria para que el conjunto formado por las columnas de la misma matriz  $A$ , formen un conjunto linealmente independiente. Justifique su respuesta.
- b) Considere la transformación lineal  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2$  definida por  $T(a, b, c) = ct^2 + (a - b)t + (b + c)$ . Explique por qué  $T$  es un isomorfismo entre  $\mathbb{R}^3$  y  $P_2$ .
- c) Suponga que  $B$  es una matriz simétrica de  $6 \times 6$ . Si todos los valores propios de la matriz  $B$  tienen multiplicidad algebraica 2, ¿cuál es la multiplicidad geométrica asociada al espacio propio de cada valor propio?
- d) Sea  $S = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  una base para el espacio vectorial  $W$ . Verifique que  $\{[w_1]_S, [w_2]_S, \dots, [w_n]_S\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

5. (24 puntos)

- a) Sean  $u$  y  $v$  soluciones del sistema lineal homogéneo  $Ax = 0$ . Muestre que cualquier combinación lineal de  $u$  y  $v$  es también solución del mismo sistema homogéneo.
- b) Demuestre que si el sistema  $Ax = b$ ,  $b \neq 0$  tiene dos soluciones distintas, entonces tiene infinitas soluciones.
- c) Sean  $W_1$  y  $W_2$  subespacios de un espacio vectorial  $V$ . Sea  $W_1 + W_2 = \{v \in V : v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ . Muestre que  $W_1 + W_2$  es un subespacio de  $V$ .
- d) Sea  $A$  una matriz  $n \times n$ . Demuestre que  $\det A$  es igual al producto de los valores propios de  $A$ .

6. (10 puntos) Elija y resuelva uno y sólo uno de los siguientes items.

- a) Argumente por qué la matriz  $T = \begin{bmatrix} 0,50 & 0,60 & 0,40 \\ 0,25 & 0,30 & 0,30 \\ 0,25 & 0,10 & 0,30 \end{bmatrix}$  puede considerarse una matriz de transición regular de un proceso de Markov y encuentre el vector de estado estacionario para dicha matriz  $T$ .
- b) Determine una forma cuadrática  $h$  equivalente a la forma cuadrática  $g(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 10yz$ .