UNIVERSIDAD ICESI — Facultad de Ingeniería — Departamento de Matemáticas y Estadística

Supletorio Del Examen Final de Algebra Lineal

1. (20 puntos) Considere las rectas: $l_1:$ pasa por los puntos $P_1(1,0,5)$ y $P_2(-1,0,1)$

$$l_2: \begin{array}{l} x=-1+t \\ y=3+t \\ z=7-t \end{array} .$$

   (a) Encuentre las ecuaciones de un plano π_1 que contenga a l_1 y de un plano π_2, paralelo a π_1, que contenga a l_2.

   (b) Encuentre la ecuación de una recta l_3 que intersecte a la recta l_1 y que sea perpendicular al plano π_2 del ítem anterior.

   (c) Encuentre la distancia de l_1 al plano π_2. punto de intersección de la recta del inciso (b) con el plano del inciso (a).

2. (24 puntos) Sea $L: R^3 \rightarrow R^2$ una transformación lineal tal que

$$L(1,0,0)=(1,0),\ L(0,1,0)=(0,1),\ L(1,0,1)=(1,1).$$

   (a) Hallar la matriz de L respecto a las bases canónicas.

   (b) Hallar bases para el núcleo y la imagen de L.

   (c) Hallar $L(1,1,1)$.

   (d) Hallar dos vectores distintos tales que $L(u)=(2,2)$.

3. (26 puntos) Sea $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (a) Compruebe que los valores propios de A son $\lambda_1=\lambda_2=-2$ y $\lambda_3=\lambda_4=4$.

   (b) Diagonalice ortogonalmente la matriz A proporcionando una matriz ortogonal P y la matriz diagonal D tal que $PD=AP$.

4. (36 puntos)

   Dados los enunciados siguientes analice si son ciertos o falsos, justificando su respuesta.

   (a) El subespacio $V=\{A \in M_{2\times 2} / A^T = 2A\}$ tiene dimensión nula.

   (b) El producto de matrices ortogonales del mismo orden es una matriz ortogonal.

   (c) Todo conjunto linealmente independiente es ortogonal .

   (d) Sea A una matriz fija de $n \times n$. La función $L: M_{n\times n} \rightarrow M_{n\times n}$ definida por $L(B)=AB-BA$, para $B \in M_{n\times n}$, es una transformación lineal.

(e) Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son valores propios distintos de una matriz A, con vectores propios asociados $x_1, x_2, \ldots, x_k$ entonces, los vectores propios forman un conjunto linealmente independiente.

5. (10 puntos) Elija y resuelva solamente uno de los ejercicios siguientes.

(a) Determine una forma cuadrática equivalente a $g(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 - 8xz - 3z^2$.

(b) Halle el vector de estado estacionario de la matriz de transición $T = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$.

Nota :El examen se califica sobre 100 puntos.