

Taller #1
Econometría 06216
Repaso

Profesor: Julio César Alonso – Ana Isabel Gallego
Monitora: Valentina Gatti

Notas:

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite).

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.

1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal (escriba todo su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado).

- Demuestre que $\sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2$ donde x es una variable estocástica.
- Muestre que $Cov(x, x) = Var(x)$ donde x es una variable estocástica.
- Suponga que X , Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E(XY)$, $E(XZ)$ y $Var(3X + 2Y - 5)$ a partir de los siguientes datos. (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y, aunque no debe reportar todos los decimales, en sus cálculos debe incluirlos todos, de tal forma que la respuesta sea exacta):

$$\sigma_x^2 = 34$$

$$\rho_{xy} = 19/30$$

$$\rho_{xz} = 0$$

$$E(X) = 366/5$$

$$Y = [6 \ 47 \ 22 \ 14 \ 35 \ 9 \ 27]$$

$$Z = [3 \ 31 \ 67 \ 90 \ 29 \ 55 \ 11 \ 23]$$

2. Un grupo de estudiantes de economía mientras esperaban que llegaría su profesor de econometría en medio del aburrimiento se idearon un juego en donde además de lanzar un dado y una moneda, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que llegaría el profesor a tiempo o no lo hiciera (según la experiencia y lo hablado con el profesor, existe una probabilidad del 80% de que si llegue a tiempo). Entonces entre todo se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	10
2	9
3	3
4	-3
5	9
6	10

Si Cara Superior de la moneda	Remuneración (miles de pesos)	Si el profesor	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10	Llega	10
Sello	-5	No Llega	20

Sean X , Y y Z los ingresos recibidos por cada jugador por el resultado del dado, la moneda y la llegada del profesor, respectivamente.

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

- Calcule el valor esperado de X , Y y Z
 - Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W
 - Calcule las varianzas de X , Y y Z
 - Siendo $F = X - Z$, hallar $Var(F)$
3. Siguiendo con la pregunta anterior.
- Demuestre que Y y Z son independientes.
 - ¿Son F y F^2 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta
4. En su calidad de futuro Economista, y reconociendo su gran conocimiento de estadística, se le ha encargado tomar una decisión crucial para una organización que esta requiriendo asesoría. La tesorería de esta compañía está considerando diferentes opciones para componer el portafolio de la empresa. En estos momentos se encuentran 3 diferentes opciones de portafolio:
- Invertir en CDTs y en TES.
 - Invertir en CDTs y en acciones colombianas.
 - Invertir en CDTs y en bonos del tesoro americano.
- Diversos analistas económicos han establecido que existe una probabilidad de $1/2$ que la economía colombiana presente un auge para el próximo año y con una probabilidad de $1/4$ se espera una recesión, o una situación normal para el próximo año. Los rendimientos para cada uno de estos escenarios y opciones descritas se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 1. Rentabilidades Esperadas por Activo por Escenario

Escenario	CDT	TES	Acciones	Bonos US
	Retorno	Retorno	Retorno	Retorno
Recesión	-0.07	0.17	-0.15	0.27
Normal	0.12	0.07	0.19	-0.48
Auge	0.28	-0.03	0.41	0.27

- a. Según las diferentes opciones de portafolios, ¿cual recomendaría usted si la empresa busca el que sea más rentable? (Mostrar todos sus cálculos y explicar claramente por qué realiza los cálculos que presenta)
- b. Si por el contrario, la empresa quisiera conocer inclinarse por él menos "riesgoso", ¿cual le recomendaría? (Mostrar todos sus cálculos y explicar claramente por qué realiza los cálculos que presenta)

Dadas las siguientes matrices (Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros):

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 23 & 7 & 2 \\ 5 & 11 & 3 & 14 \\ 7 & 6 & 15 & 9 \\ 20 & 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 7 & 2 \\ 9 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 20 & 9 \\ 16 & 15 & 10 & 3 \\ 4 & 8 & 8 & 11 \\ 12 & 18 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Encuentre (Muestre todo el procedimiento, reporte sus resultados en fraccionarios) AB , $BB^T + C$, $B^T C$, $(A^T + B^T)$, $\det(C^T)$.

6. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre: B^{-1} , $2A + C^T$, CB , $\text{ran}(A)$.

Taller #1
Econometría 06216
Respuestas sugeridas
Repaso

Profesor: Julio César Alonso

Monitora: Valentina Gatti

Notas:

- Recuerde que únicamente tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado físicamente en los primeros 10 minutos de la clase. (no se recibirán talleres después de esa hora y fecha límite).

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
 - Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
1. Resuelva los siguientes puntos con la información dada en cada literal (escriba todo su proceso y aclare las propiedades o igualdades de las que hace uso para llegar a su resultado).

- a. Demuestre que $\sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2$ donde x es una variable estocástica.

$$\sum (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum x^2 - n\bar{x}^2 \quad \text{se distribuye la sumatoria}$$

$$\sum x^2 - 2\sum x\bar{x} + \sum \bar{x}^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2 \quad \text{se resuelven las sumatorias}$$

$$\sum x^2 - 2n\bar{x} + n\bar{x}^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2 \quad \text{se opera}$$

$$\sum x^2 - n\bar{x}^2 = \sum x^2 - n\bar{x}^2$$

- b. Muestre que $Cov(x, x) = Var(x)$ donde x es una variable estocástica.

Por definición de covarianza:

$$E[(x - \mu_x)(x - \mu_x)] = Var(x)$$

$$E(x - \mu_x)^2 = Var(x) \quad \text{que es la definición de varianza}$$

- c. Suponga que X , Y y Z son variables aleatorias. Encuentre $E(XY)$, $E(XZ)$ y $Var(3X + 2Y - 5)$ a partir de los siguientes datos. (muestre el procedimiento que utiliza para llegar a la respuesta y, aunque no debe reportar todos los decimales, en sus cálculos debe incluirlos todos, de tal forma que la respuesta sea exacta):

$$\sigma_x^2 = 34$$

$$\rho_{XY} = 19/30$$

$$\rho_{XZ} = 0$$

$$E(X) = 366 / 5$$

$$Y = [6 \ 47 \ 22 \ 14 \ 35 \ 9 \ 27]$$

$$Z = [3 \ 31 \ 67 \ 90 \ 29 \ 55 \ 11 \ 23]$$

Respuesta Sugerida:

$$E(Y) = 22,86 = 160 / 7$$

$$Var(Y) = 186,12 = 9120 / 49$$

$$E(Z) = 38,625 = 309 / 8$$

$$Var(Z) = 767,48 = 49119 / 64$$

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \longrightarrow Cov(X,Y) = \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y$$

$$Cov(X,Y) = 19 / 30 \times \sqrt{34} \times \sqrt{9120 / 49} = 50,38$$

$$E(XY) = Cov(X,Y) + E(X)E(Y) = 50,38 + (366 / 5 \times 160 / 7) = 146,44$$

$$E[XZ] = E[X]E[Z] \text{ pues } Cov(X,Z) = 0 \text{ y } \rho_{XZ} = 0$$

$$E[XZ] = 366 / 5 \times 309 / 8 = 2827,35 = 56547 / 20$$

$$Var(3X + 2Y - 5) = 9Var(X) + 4Var(Y) + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot Cov(X,Y)$$

$$Var(3X + 2Y - 5) = 9 \cdot (34) + 4 \cdot (9120/49) + 12 \cdot (50,38) = 1655,07$$

2. Un grupo de estudiantes de economía mientras esperaban que llegará su profesor de econometría en medio del aburrimiento se idearon un juego en donde además de lanzar un dado y una moneda, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que llegará el profesor a tiempo o no lo hiciera (según la experiencia y lo hablado con el profesor, existe una probabilidad del 80% de que si llegue a tiempo). Entonces entre todo se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado es	Remuneración (miles de pesos)
1	10
2	9
3	3
4	-3
5	9
6	10

Si Cara Superior de la moneda	Remuneración (miles de pesos)
Cara	10
Sello	-5

Si el profesor	Remuneración (miles de pesos)
Llega	10
No Llega	20

Sean X , Y y Z los ingresos recibidos por cada jugador por el resultado del dado, la moneda y la llegada del profesor, respectivamente.

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X , Y y Z

Siguiendo la definición del valor esperado de una variable aleatoria discreta, se obtiene:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n X_i \cdot P(X_i) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{38}{6} = 6, \bar{3} = 19/3$$

$$E(Y) = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot P(Y_i) = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$E(Z) = \sum_{i=1}^n Z_i \cdot P(Z_i) = \frac{1}{4} 20 + \frac{3}{4} 10 = 12$$

b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W

Respuesta sugerida:

$$E(W) = E(X + Y + Z) = E(X) + E(Y) + E(Z)$$

$$E(W) = \frac{19}{3} + \frac{5}{2} + 12$$

$$E(W) = 20,83$$

c. Calcule las varianzas de X , Y y Z

Respuesta sugerida:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{190}{3} - \frac{361}{9} = \frac{209}{9} = 23, \bar{2}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{125}{2} - \frac{25}{4} = \frac{225}{4} = 56,25$$

$$Var(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = 160 - 144 = 16$$

d. Siendo $F = X - Z$, hallar $Var(F)$

Respuesta sugerida:

$$Var[F] = Var[X - Z] = Var(X) + Var(Z) = 23,22 + 16 = 39,22$$

3. Siguiendo con la pregunta anterior.

a. Demuestre que Y y Z son independientes.

Respuesta sugerida:

Aunque es sencillo demostrar que Y y Z son independientes, intuitivamente se puede saber que lo son ya que las tres variables no se encuentran relacionadas entre si.

b. ¿Son F y F^2 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta
 Respuesta sugerida:

Si F y F^2 son independientes se debe cumplir que $E(FF^2) = E(F)E(F^2)$; por lo tanto se debe demostrar si esta igualdad se cumple o no. Primero, se puede calcular la parte izquierda de la igualdad:

$$E(FF^2) = E\{(X - Z)^3\}$$

$$E(FF^2) = E(X^3) - 3E(X^2)E(Z) + 3E(X)E(Z^2) - E(Z^3)$$

$$E(FF^2) = -1063,6$$

El lado derecho de la igualdad es

$$E(F)E(F^2) = E\{(X - Z)^2\} * E(X - Z)$$

$$E(F)E(F^2) = \{E(X^2) - 2E(X)E(Z) + E(Z^2)\} * \{E(X) - E(Z)\}$$

$$E(F)E(F^2) = -404,2$$

Dado que la igualdad no se cumple se puede concluir que F y F^2 no son independientes.

4. En su calidad de futuro Economista, y reconociendo su gran conocimiento de estadística, se le ha encargado tomar una decisión crucial para una organización que está requiriendo asesoría.

La tesorería de esta compañía está considerando diferentes opciones para componer el portafolio de la empresa. En estos momentos se encuentran 3 diferentes opciones de portafolio:

1. Invertir en CDTs y en TES.
2. Invertir en CDTs y en acciones colombianas.
3. Invertir en CDTs y en bonos del tesoro americano.

Diversos analistas económicos han establecido que existe una probabilidad de $\frac{1}{2}$ que la economía colombiana presente un auge para el próximo año y con una probabilidad de $\frac{1}{4}$ se espera una recesión, o una situación normal para el próximo año. Los rendimientos para cada uno de estos escenarios y opciones descritas se presentan en la siguiente tabla.

Tabla 1. Rentabilidades Esperadas por Activo por Escenario

Escenario	CDT Retorno	TES Retorno	Acciones Retorno	Bonos US Retorno
Recesión	-0.07	0.17	-0.15	0.27
Normal	0.12	0.07	0.19	-0.48
Auge	0.28	-0.03	0.41	0.27

- a. Según las diferentes opciones de portafolios, ¿cual recomendaría usted si la empresa busca el que sea más rentable? (Mostrar todos sus cálculos y explicar claramente por qué realiza los cálculos que presenta)

Respuesta Sugerida:

El portafolio a sugerir como el más rentable sería el 2 (aquel con Acciones) pues su retorno medio de 0,1875 es mayor de al de los demás.

Tabla 2. Consideración 1er portafolio

Escenario	CDT Retorno	TES Retorno	Probabilidad
Recesión	-0,07	0,17	0,25
Normal	0,12	0,07	0,25
Auge	0,28	-0,03	0,5
Media	0,153	0,045	
	Retorno Medio del portafolio		0,09875

Tabla 3. Consideración 2do portafolio

Escenario	CDT Retorno	Acciones Retorno	Probabilidad
Recesión	-0,07	-0,15	0,25
Normal	0,12	0,19	0,25
Auge	0,28	0,41	0,5
Media	0,153	0,215	
	Retorno Medio del portafolio		0,18375

Tabla 4. Consideración 3er portafolio

Escenario	CDT Retorno	Acciones Retorno	Probabilidad
Recesión	-0,07	0,27	0,25
Normal	0,12	-0,48	0,25
Auge	0,28	0,27	0,5
Media	0,153	0,0825	
	Retorno Medio del portafolio		0,1175

- b. Si por el contrario, la empresa quisiera conocer inclinarse por él menos “riesgoso”, ¿cual le recomendaría? (Mostrar todos sus cálculos y explicar claramente por qué realiza los cálculos que presenta)

Respuesta Sugerida:

El portafolio a sugerir como el menos riesgoso sería el 1 (aquel con TES) pues su correlación de -0,999 se acerca más a menos uno que la de los demás. Lo que implica que una combinación de los dos hace que la inversión sea más segura pues presentan un comportamiento en el que se tienen rendimientos que un título compensa las pérdidas del otro cuando la hay para los distintos ciclos de la economía.

Tabla 5. Consideración 1er portafolio

Escenario	CDT		TES		Probabilidad
	Retorno	Desviación de la media	Retorno	Desviación de la media	
Recesión	-0,07	-0,2225	0,17	0,125	0,25
Normal	0,12	-0,0325	0,07	0,025	0,25
Auge	0,28	0,1275	-0,03	-0,075	0,5
Media	0,1525		0,045		
Varianza	0,02076875		0,006875		
Covarianza	-0,0119375				
Correlación	-0,99901464				

Tabla 6. Consideración 2do portafolio

Escenario	CDT		TES		Probabilidad
	Retorno	Desviación de la media	Retorno	Desviación de la media	
Recesión	-0,07	-0,2225	-0,15	-0,365	0,25
Normal	0,12	-0,0325	0,19	-0,025	0,25
Auge	0,28	0,1275	0,41	0,195	0,5
Media	0,1525		0,215		
Varianza	0,02076875		0,052475		
Covarianza	0,0329375				
Correlación	0,99772127				

Tabla 7. Consideración 3er portafolio

Escenario	CDT		Acciones		Probabilidad
	Retorno	Desviación de la media	Retorno	Desviación de la media	
Recesión	-0,07	-0,2225	0,27	0,1875	0,25
Normal	0,12	-0,0325	-0,48	-0,5625	0,25
Auge	0,28	0,1275	0,27	0,1875	0,5
Media	0,1525		0,0825		
Varianza	0,02076875		0,10546875		
Covarianza	0,00609375				
Correlación	0,13020197				

Dadas las siguientes matrices (Reporte todos sus resultados en fraccionarios o enteros):

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 23 & 7 & 2 \\ 5 & 11 & 3 & 14 \\ 7 & 6 & 15 & 9 \\ 20 & 8 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 12 & 7 & 2 \\ 9 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 1 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 20 & 9 \\ 16 & 15 & 10 & 3 \\ 4 & 8 & 8 & 11 \\ 12 & 18 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

5. Encuentre (Muestre todo el procedimiento, reporte sus resultados en fraccionarios)
 AB , $BB^T + C$, $B^T C$, $(A^T + B^T)$, $\det(C^T)$

$$AB = \begin{bmatrix} 289 & 204 & 266 & 184 \\ 240 & 152 & 139 & 178 \\ 253 & 153 & 214 & 182 \\ 220 & 316 & 232 & 184 \end{bmatrix}$$

$$BB^T + C = \begin{bmatrix} 222 & 102 & 106 & 86 \\ 113 & 166 & 158 & 128 \\ 90 & 156 & 162 & 122 \\ 89 & 143 & 113 & 139 \end{bmatrix}$$

$$B^T C = \begin{bmatrix} 296 & 348 & 190 & 196 \\ 388 & 185 & 286 & 164 \\ 308 & 207 & 266 & 178 \\ 232 & 251 & 144 & 151 \end{bmatrix}$$

$$(A^T + B^T) = \begin{bmatrix} 11 & 14 & 15 & 28 \\ 35 & 14 & 7 & 12 \\ 14 & 9 & 23 & 5 \\ 4 & 19 & 14 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(C^T) = 27296$$

6. Continuando con el ejercicio anterior, encuentre:
 B^{-1} , $2A + C^T$, CB , $\text{ran}(A)$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -17/291 & 135/274 & -126/415 & -29/245 \\ 43/674 & 25/188 & -143/921 & -2/867 \\ 34/983 & -7/58 & 191/990 & -19/309 \\ 7/276 & -564/907 & 20/49 & 49/170 \end{bmatrix}$$

$$2A + C^T = \begin{bmatrix} 44 & 62 & 18 & 16 \\ 15 & 37 & 14 & 46 \\ 34 & 22 & 38 & 20 \\ 49 & 19 & 19 & 33 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 301 & 359 & 367 & 236 \\ 255 & 259 & 285 & 178 \\ 228 & 124 & 151 & 165 \\ 262 & 236 & 217 & 187 \end{bmatrix}$$

$$\text{ran}(A) = 4$$