Taller #1

Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Hernán Betancur
David Valencia

Notas:

- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado entre las 8:00 am y 9:00 am del 22 de enero en mi oficina..

INSTRUCCIONES:

- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.

1. Sean X y Y variables aleatorias. Demuestre que:

a. $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

b. Si se sabe que $Var(X) = 81$, $Var(Y) = 36$ y $\rho(X,Y) = \frac{1}{2}$ encuentre $Var(X+Y)$ y $Var(2X+Y+5)$

2. Demuestre que:

a. $E(\overline{Y}) = \mu$

b. $Var(\overline{Y}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

3. Un grupo de estudiantes de estadística se encontraba celebrando su graduación en un centro de convenciones al norte de la ciudad cuando fueron sorprendidos por una tormenta que inundó las salidas del lugar y los dejó atrapados en dicho sitio. En medio del aburrimiento uno de los nuevos graduados se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe la tormenta o no(según escucharon en la radio, la institución meteorológica local afirma que existe una probabilidad de 1/4 de que continúe la tormenta). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13

Si Cara Superior del dado blanco es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	3
3	-7
4	-9
5	-11
6	-14

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa tormenta	8
No continúa tormenta	6

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por cada jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima, respectivamente.

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z
b. Sea $W = X + Y + Z$, calcule el valor esperado de W
c. Calcule la varianza de X
d. Calcule la varianza de Y
e. Calcule la varianza de Z

4. Siguiendo con la pregunta anterior,
a. Demuestre que Y y Z son independientes.
b. ¿Son Z^2 y Z^4 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta
c. ¿Son X^2 y X variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -9 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & -4 \\ 6 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 & -8 \\ 5 & 7 & 7 & -4 \\ 6 & 2 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & -13 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -200 \\ 100 \\ 700 \\ 900 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a. *AB, AC, AD, BC* y *BA*
b. A^T, det (A), B^{-1} y *ran* (A)

6. Con las matrices del punto 5 calcule: A^{-1} y $\left[A^T B^T\right]^{-1}$

Taller #1

Respuestas Sugeridas

Econometría 06169

Profesor: Julio César Alonso
Monitores: Hernán Betancur
David Valencia

Notas:
- Recuerde que tres preguntas, seleccionadas al azar, serán calificadas.
- Este taller es para ser entregado entre las 8:00 am y 9:00 am del 22 de enero en mi oficina..

INSTRUCCIONES:
- Este taller puede ser escrito a mano, pero con letra legible.
- Cuando sea posible, debe mostrar el procedimiento efectuado para llegar a sus resultados.
- Este taller es un trabajo en pareja. Por tanto el taller debe reflejar ***únicamente*** el trabajo de la pareja.

1. Sean X y Y variables aleatorias. Demuestre que:

a. $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

$$Var(X+Y)=E\left[(X+Y)^2\right]-[E(X+Y)]^2=E\left[X^2+2XY+Y^2\right]-[E(X)+E(Y)]^2$$
$$E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-\left[E(X)^2+2E(X)E(Y)+E(Y)^2\right]$$
$$E(X^2)+2E(XY)+E(Y^2)-E(X)^2-2E(X)E(Y)-E(Y)^2$$

Dado que $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$, entonces:

$$Var(X+Y)=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^2)-E(Y)+2E(XY)-2E(X)E(Y)$$
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2[E(XY)-E(X)E(Y)]$$
$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

b. Si se sabe que $Var(X)=81$, $Var(Y)=36$ y $\rho(X,Y)=\frac{1}{2}$ encuentre $Var(X+Y)$ y $Var(2X+Y+5)$

Teniendo en cuenta que $\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ entonces,

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2(\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}\cdot\rho(X,Y))$ Así pues:

$$Var(X+Y)=81+36+2(\sqrt{81}\cdot\sqrt{36}\cdot 1/2)$$
$$Var(X+Y)=27$$

$$Var(2X+Y+5)=Var(2X)+Var(Y)+2Cov(2X,Y)$$
$$4Var(X)+Var(Y)+(2)(2)\left(\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}\rho(X,Y)\right)$$
$$(4)(81)+36+4\left(\sqrt{81}\sqrt{36}\,1/2\right)=468$$

2. Demuestre que:

a. $E(\bar{Y})=\mu$

Dado que la media de Y es $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$, se tiene que:

$$E(\bar{Y})=E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(Y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_i=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

b. $Var(\bar{Y})=\dfrac{\sigma^2}{n}$

Dado que la media de Y es $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}$, se tiene que:

$$Var(\bar{Y})=Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}Var(Y_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>1}^{n}Cov(Y_i,Y_j)\right)$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2+2(0)\right)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

3. Un grupo de estudiantes de estadística se encontraba celebrando su graduación en un centro de convenciones al norte de la ciudad cuando fueron sorprendidos por una tormenta que inundó las salidas del lugar y los dejó atrapados en dicho sitio. En medio del aburrimiento uno de los nuevos graduados se inventó un juego en donde además de lanzar dos dados, uno negro y otro blanco, sobre una superficie plana se incluyera la posibilidad de que continúe la tormenta o no(según escucharon en la radio, la institución meteorológica local afirma que existe una probabilidad de 1/4

de que continúe la tormenta). Entonces se fijó la siguiente tabla de premios (una remuneración negativa significa que el jugador debe pagar, mientras que una remuneración positiva significa que el jugador recibe algo a cambio).

Si Cara Superior del dado negro es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8
6	13

Si Cara Superior del dado blanco es	Remuneración (miles de pesos)
1	1
2	3
3	-7
4	-9
5	-11
6	-14

Si	Remuneración (miles de pesos)
Continúa tormenta	8
No continúa tormenta	6

Sean X, Y y Z los ingresos recibidos por cada jugador por el resultado del dado negro, blanco y el estado del clima, respectivamente.

A partir de la información anterior responda las siguientes preguntas:

a. Calcule el valor esperado de X, Y y Z

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{32}{6}=5.3333$$

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot P(Y_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} Y_i=\frac{-37}{6}=-6.16$$

$$E(Z)=\sum_{i=1}^{n} Z_i \cdot P(Z_i)=\frac{8}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)6=6.50$$

b. Sea $W=X+Y+Z$, calcule el valor esperado de W

$$E(W)=E(X+Y+Z)=E(X)+E(Y)+E(Z)$$

$$E(W)=\frac{32}{6}-\frac{37}{6}+6.50$$

$$E(W)=5.66$$

c. Calcule la varianza de X

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{272}{6}-\frac{256}{9}=16.89$$

d. Calcule la varianza de Y

$$Var(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=\frac{457}{6}-\frac{1369}{36}=38.14$$

e. Calcule la varianza de Z

$$Var(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=43-42.25=0.75$$

4. Siguiendo con la pregunta anterior,
a. Demuestre que Y y Z son independientes.
b. ¿Son Z^2 y Z^4 variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta
c. ¿Son X^2 y X variables aleatorias independientes? Justifique su respuesta

a. Si Y y Z son independientes $Cov(Y,Z)=0$ por tanto se tendría que $E(YZ)=E(Y)E(Z)$

Con el fin de llegar a esta igualdad lo primero que se debe hacer es calcular las remuneraciones conjuntas de tal manera se obtiene:

$ZY=$

		Y					
		1	**3**	**-7**	**-9**	**-11**	**-14**
Z	**8**	8,00	24,00	-56,00	-72,00	-88,00	-112,00
	6	6,00	18,00	-42,00	-54,00	-66,00	-84,00

Tras obtener YZ, es decir las remuneraciones conjuntas se procede a establecer cual es la esperanza de estas. Pero como se estableció en el taller existen unas probabilidades de ocurrencia tanto para Y como para Z, por lo tanto es necesario determinar las probabilidades de cada remuneración conjunta. Así la probabilidad de ocurrencia de la primera remuneración conjunta (8) es $P(Z=8,Y=1)=\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{24}$
De manera similar se calculan las restantes probabilidades y se obtiene:

$P(Z=z,Y=y)=$

		Y					
		1/6	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**
Z	**1/4**	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24
	3/4	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Para obtener $E(YZ)$ solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado

$(ZY)P(Z=z,Y=y)=$

0,33	1,00	-2,33	-3,00	-3,67	-4,67
0,75	2,25	-5,25	-6,75	-8,25	-10,50
E(YZ)=	-40,1				

Al comparar $E(YZ)$ con $E(Y)E(Z)$ es claro que Y y Z con independientes.

b. Esta pregunta se desarrolla de una manera similar a la anterior la diferencia es que ahora se quiere probar que $E(Z^2 Z^4) = E(Z^2)E(Z^4)$. Lo primero que se debe hacer es obtener las remuneraciones conjuntas.

$Z^2 Z^4 =$

		Z^4	
		4096	***1296***
Z^2	***64***	262144	82944
	36	147456	46656

Se procede entonces a obtener las probabilidades de las remuneraciones conjuntas

$P(Z^2 = z, Z^4 = z) =$

		Z^4	
		1/4	***3/4***
Z^2	***1/4***	1/16	3/16
	3/4	3/16	9/16

Solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado

$(Z^2 Z^4)P(Z^2 = z, Z^4 = z) =$

16384,00	15552
27648,00	26244
$E(Z^2Z^4)$=	85828

Y dado que

$E(Z^2)$=	1996
$E(Z^4)$=	43
$E(Z^2)E(Z^4)$=	85828

Se puede concluir que Z^2 y Z^4 son variables aleatorias independientes

c. Esta pregunta se desarrolla de la misma manera que la anterior la diferencia es que ahora se quiere probar que $E(X^2 X) = E(X^2)E(X)$. Lo primero que se debe hacer es obtener las remuneraciones conjuntas

$X^2 X =$

		X					
		1	***2***	***3***	***5***	***8***	***13***
X^2	***1***	1	2	3	5	8	13
	4	4	8	12	20	32	52
	9	9	18	27	45	72	117
	25	25	50	75	125	200	325
	64	64	128	192	320	512	832
	169	169	338	507	845	1352	2197

Se procede entonces a obtener las probabilidades de las remuneraciones conjuntas

$P(X^2 = x, X = x)$

		X					
		1/6	***1/6***	***1/6***	***1/6***	***1/6***	***1/6***
X^2	***1/6***	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
	1/6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Solo restaría efectuar la multiplicación de cada remuneración conjunta con su respectiva probabilidad de ocurrencia y sumar los resultados, dicho procedimiento debe dar como resultado

$(X^2 X)P(X^2 = x, X = x) =$

0,03	0,06	0,08	0,14	0,22	0,36
0,11	0,22	0,33	0,56	0,89	1,44
0,25	0,50	0,75	1,25	2,00	3,25
0,69	1,39	2,08	3,47	5,56	9,03
1,78	3,56	5,33	8,89	14,22	23,11
4,69	9,39	14,08	23,47	37,56	61,03
$E(X^2X)$= 241,8					

Y dado que

$E(X^2)$=	5,33
$E(X)$=	45,33
$E(X^2)E(X)$=	241,8

Se puede concluir que X^2 y X son variables aleatorias independientes

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 8 & -9 & 1 \\ 5 & 7 & 7 & -4 \\ 6 & 2 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 & -8 \\ 5 & 7 & 7 & -4 \\ 6 & 2 & 8 & 3 \\ -3 & 1 & -13 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -200 \\ 100 \\ 700 \\ 900 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 13 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Encuentre (muestre todo el procedimiento):

a. *AB, AC, AD, BC* y *AB*

$$AB=\begin{bmatrix} 46 & 39 & -49 & -38 \\ 19 & 54 & -26 & -79 \\ 149 & 84 & 162 & -63 \\ 121 & 63 & 45 & -20 \end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} 1400 \\ -5200 \\ 1000 \\ 7300 \end{bmatrix}$$

AD No es conformable

$$BC=\begin{bmatrix} -8400 \\ 1000 \\ 7300 \\ -4800 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 32 & 55 & -126 & 25 \\ 57 & 107 & -56 & -13 \\ 94 & 90 & 50 & 3 \\ -53 & -81 & -62 & 53 \end{bmatrix}$$

b. A^T, det (A), B^{-1} y *ran* (A)

$$A^T=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ -2 & -9 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad det(A)=1413$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{299}{3779} & -\frac{311}{3779} & \frac{316}{3779} & \frac{9559969}{722542457} \\ -\frac{170}{3779} & \frac{1251}{7558} & -\frac{4405071}{594527261} & \frac{613}{7558} \\ -\frac{127}{3779} & \frac{201}{7558} & \frac{68}{3779} & -\frac{409}{7558} \\ -\frac{146}{3779} & -\frac{8848729}{530783284} & \frac{465}{3779} & \frac{241}{3779} \end{pmatrix}$$

$$ran(A)=4$$

6. Con las matrices del punto 5 calcule: A^{-1} y $\left[A^T B^T\right]^{-1}$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{727}{1413} & -\frac{332}{1413} & \frac{302}{1413} & -\frac{152}{471} \\ -\frac{508}{1413} & \frac{335}{1413} & -\frac{143}{1413} & \frac{125}{471} \\ -\frac{257}{1413} & \frac{61}{1413} & -\frac{64}{1413} & \frac{79}{471} \\ -\frac{430}{1413} & \frac{278}{1413} & -\frac{338}{1413} & \frac{167}{471} \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T B^T\right)^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{132857}{2348801} & -\frac{129281}{2812706} & -\frac{57035}{2678858} & -\frac{33687}{872989} \\ -\frac{116113}{1654759} & \frac{74934}{1214221} & \frac{24508}{1353047} & \frac{76431}{1685843} \\ \frac{33821}{3800078} & -\frac{14564}{14793187} & \frac{30617}{7128872} & \frac{7271}{585448} \\ -\frac{49559}{1116292} & \frac{58822}{1595225} & \frac{54338}{3815179} & \frac{63744}{1342339} \end{pmatrix}$$