Supletorio Examen Final Algebra Lineal NOCTURNO

El Examen se califica sobre 100 puntos

NOMBRE______________________________ CÓDIGO__________ Grupo 02

Profesor: Fernando Posso Gómez

1. Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

a) (5 puntos) Encuentre los valores propios de A

b) (7 puntos) sabiendo que el polinomio característico de la matriz A es $(\lambda - 3)^2(\lambda)$ encuentre los vectores propios de A asociados a cada valor propio λ

c) (10 puntos) Diagonalice ortogonalmente la matriz A encontrando una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tales que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$

2. Sea L una transformación lineal $\mathbf{L}: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ definida como $\mathbf{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \mathbf{w} \\ 2\mathbf{x} - \mathbf{y} + 2\mathbf{z} - \mathbf{w} \\ \mathbf{x} - 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z} - 2\mathbf{w} \end{bmatrix}$

a) (5 puntos) Encuentre la matriz de la transformación lineal L referida a las bases canónicas

b) (12 puntos) Encuentre una base para el núcleo de L y una para la imagen de L

c) (5 puntos) ¿Es L Inyectiva? Justifique su respuesta

3. (12 puntos) Sea $\mathbf{L}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ una transformación lineal tal que $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1, -2)$, $L\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,3)$.
Encuentre $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ y determine luego el valor de $L\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

4. (10 puntos) Determine la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos (1,1), (2,2), (3,4) y $(0,\frac{2}{3})$

5. Demuestre cada una de las siguientes proposiciones

(a) **(8 puntos)** Si los planos $ax + by + cz + d_1 = 0$ y $px + qy + rz + w = 0$ son perpendiculares muestre porque es falso afirmar que $ap + bq + cr \neq 0$

(b) **(8 puntos)** Dos rectas **se cruzan** si no son paralelas ni se interceptan. Muestre que las rectas dadas se cruzan:
$l_1: x = 1 + 4t; y = 2 + 5t; z = 3 + 3t$ y $l_2: x = 2 + h; y = 1 - 3h; z = -1 - 2h$

(c) **(8 puntos)** Muestre que $T = \{(x, y, z) | x + y - z = 0\}$ es un subespacio de R^3

(d) **(8 puntos)** Si $\mathbf{S} = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ es un conjunto de vectores tal que $\mathbf{v_4}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ **y** $\mathbf{v_3}$ entonces S es linealmente dependiente

(e) **(8 puntos)** Si A es una matriz ortogonal entonces el determinante de A es ± 1