UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Matemáticas y Estadística

EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES. 14 de mayo de 2008

NOMBRE:____ CÓDIGO:______________

PROFESOR:____ GRUPO:______________

NOTA: i) El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de **120** puntos. SE CALIFICA SOBRE **100** PUNTOS.
ii) En este examen **no se permite el uso de calculadora**. Aquellas respuestas que involucren raíces o logaritmos deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

1. (15 puntos) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

   (a) $\dfrac{2x}{x+3} + \dfrac{5}{x} = \dfrac{18}{x^2+3x}$

   (b) $|3x-2| + 3 = 7$

   (c) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

2. (10 puntos) Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 que satisfaga las siguientes condiciones: $p(-3+5i) = 0$, $p(0) = 0$ y $p(1) = 4$

3. (16 puntos)

   (a) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto (3,4). Seguidamente encuentre la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en el punto (3,4).

   (b) Muestre gráficamente que el siguiente sistema de ecuaciones tiene dos soluciones. Luego resuelva el sistema para identificar claramente dichas soluciones

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 &= 4 \\ x^2 - y &= 0 \end{cases}$$

4. (20 puntos)

   (a) Determine el dominio de la siguiente función $f(x) = \dfrac{\sqrt{|1-2x| - 10}}{x^2 - 6x}$

   (b) Dada la función $f(x) = \dfrac{1-x}{3x-2}$. i) Demuestre que f es inyectiva ii) Justifique por qué existe la función inversa f^{-1} y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$ iii) Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

5. (15 puntos)

   (a) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ de la ecuación $2\cos^2 x = 1 - \text{sen}x$

   (b) Trace la gráfica de la función $y = 2\text{sen}(3x - \frac{\pi}{2})$ en un período.

6. (24 puntos)

   (a) Un alambre de 24 pulgadas de largo se dobla en forma de un rectángulo de ancho x y de longitud y. i) Exprese el área del rectángulo como función del ancho e indique el dominio admisible para esta función ii) Halle las dimensiones del rectángulo que hacen que su área sea máxima

   (b) La población $N(t)$ (en millones de habitantes) de Estados Unidos, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 227e^{7t/1000}$ i) Estime el número de habitantes en Estados unidos en el año 2980 ii) Determine en cuántos años se duplica la población

   (c) Dos barcos salen de un punto al mismo tiempo; uno navega en dirección $N70^oO$ a razón constante de R_1 millas por hora y el otro navega en dirección $N50^oE$ a razón constante de R_2 millas por hora. Demuestre que después de 2 horas la distancia entre los barcos viene dada por la fórmula $D = 2\left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2}\right)$

7. (20 puntos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

   (a) Si α es un ángulo agudo y $\tan\alpha = \frac{x}{3}$, entonces $\text{sen}\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

   (b) La gráfica de la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$ es una hipérbola con centro en el punto $(-3, 2)$.

   (c) El polinomio $p(x) = x^3 + 5x - 2$ tiene exactamente una raíz real y ésta se encuentra en el intervalo (0, 1).

   (d) La recta $y = x+2$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$.

   (e) $(1 + i)^{12} = -64$