



EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA Y FUNCIONES. 14 de mayo de 2008

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

PROFESOR: _____ GRUPO: _____

NOTA: i) El valor total de las preguntas del presente cuestionario es de 120 puntos. SE CALIFICA SOBRE 100 PUNTOS.

ii) En este examen **no se permite el uso de calculadora**. Aquellas respuestas que involucren raíces o logaritmos deben quedar indicadas en la forma más simplificada posible.

1. (15 puntos) Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones

(a) $\frac{2x}{x+3} + \frac{5}{x} = \frac{18}{x^2+3x}$

(b) $|3x-2| + 3 = 7$

(c) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

2. (10 puntos) Encuentre un polinomio $p(x)$ de grado 3 que satisfaga las siguientes condiciones: $p(-3+5i) = 0$, $p(0) = 0$ y $p(1) = 4$

3. (16 puntos)

(a) Determine la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto (3,4). Seguidamente encuentre la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en el punto (3,4).

(b) Muestre gráficamente que el siguiente sistema de ecuaciones tiene dos soluciones. Luego resuelva el sistema para identificar claramente dichas soluciones

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$

4. (20 puntos)

(a) Determine el dominio de la siguiente función $f(x) = \frac{\sqrt{|1-2x|-10}}{x^2-6x}$

(b) Dada la función $f(x) = \frac{1-x}{3x-2}$. i) Demuestre que f es inyectiva ii) Justifique por qué existe la función inversa f^{-1} y encuentre una fórmula para $f^{-1}(x)$ iii) Verifique que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

5. (15 puntos)

- (a) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ de la ecuación $2 \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen} x$
- (b) Trace la gráfica de la función $y = 2\operatorname{sen}(3x - \frac{\pi}{2})$ en un período.

6. (24 puntos)

- (a) Un alambre de 24 pulgadas de largo se dobla en forma de un rectángulo de ancho x y de longitud y . i) Exprese el área del rectángulo como función del ancho e indique el dominio admisible para esta función ii) Halle las dimensiones del rectángulo que hacen que su área sea máxima
- (b) La población $N(t)$ (en millones de habitantes) de Estados Unidos, t años después de 1980, se puede calcular mediante la fórmula $N(t) = 227e^{7t/1000}$ i) Estime el número de habitantes en Estados Unidos en el año 2980 ii) Determine en cuántos años se duplica la población
- (c) Dos barcos salen de un punto al mismo tiempo; uno navega en dirección $N70^\circ O$ a razón constante de R_1 millas por hora y el otro navega en dirección $N50^\circ E$ a razón constante de R_2 millas por hora. Demuestre que después de 2 horas la distancia entre los barcos viene dada por la fórmula $D = 2 \left(\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2} \right)$

7. (20 puntos) Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y justifique su respuesta.

- (a) Si α es un ángulo agudo y $\tan \alpha = \frac{x}{3}$, entonces $\operatorname{sen} \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.
- (b) La gráfica de la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$ es una hipérbola con centro en el punto $(-3, 2)$.
- (c) El polinomio $p(x) = x^3 + 5x - 2$ tiene exactamente una raíz real y ésta se encuentra en el intervalo $(0, 1)$.
- (d) La recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 12}{x - 4}$.
- (e) $(1 + i)^{12} = -64$