UNIVERSIDAD ICESI

Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemáticas y Estadística

ALGEBRA LINEAL
EXAMEN CORTO 3
Grupo 17

Profesor ANIBAL SOSA

NOMBRE ______________________________ CODIGO ______________

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 8 & -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

   a) (10 ptos) Calcule det A.

   b) (5 ptos) Determine si la matriz A es singular o no singular. Justifique su respuesta.

   c) (5 ptos) Sea S el conjunto de vectores columna de la matriz A. Determine si el vector $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 3, 4)$ pertenece al $gen\{S\}$.

2. (18 ptos)

   a) Sean A, B, C matrices 3×3. Suponga que $|A| = -1$, $|B^T| = 4$ y $|C| = \frac{1}{2}$. Calcule $|A^{-1}BC|$ y $|4A^TC^{-1}|$.

   b) Sea $X = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$. Halle todos los valores de λ de modo tal que la matriz $X - \lambda I_3$ sea singular.

   c) Muestre que el conjunto $W = \{at^3 + bt^2 + ct + d : a = d, b = c\}$ es un subespacio de P_3.

   d) Obtenga las ecuaciones de un plano π y de una recta ℓ que sean subespacios de $\mathbb{R}^3$.

3. (12 ptos)

   a) Sea A una matriz singular de $n \times n$. Demuestre o argumente por qué, si el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \neq 0$, es consistente, entonces tiene infinitas soluciones.

   b) Demuestre que toda matriz antisimétrica de $m \times m$ con m impar es singular.

   c) Sean U y W subespacios de un espacio vectorial V. Considere el conjunto $U + W = \{\boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$. Muestre que $U + W$ es un subespacio de V.

4. (Opcional 6 ptos) Sea A una matriz $n \times n$ cuyas entradas son todas números enteros. Demuestre que si $\det(A) = \pm 1$ entonces todas las entradas de A^{-1} también son números enteros.