

Examen Final de Teoría de Probabilidades – 08131 período 102  
Cali, noviembre 19 de 2010.

1. El director de Marketing de una importante compañía de telefonía móvil, obtuvo los registros de los minutos consumidos por una muestra aleatoria de 120 clientes del plan mas barato de la empresa, durante un mes de estudio. A continuación se presenta una distribución de frecuencias de los minutos consumidos por los clientes seleccionados en la muestra durante el periodo de estudio:

Intervalos	Marca de Clase	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia Absoluta Acumulada	Frecuencia Relativa Acumulada
120 - 150	135	20	0.167	20	0.167
150 - 180	165	22	0.183	42	0.35
180 - 210	195	27	0.225	69	0.575
210 - 240	225	21	0.175	90	0.75
240 - 270	255	30	0.25	120	1
Total		120			

A partir de este enunciado y la tabla presentada resuelva:

- ¿Cuál es el tiempo medio consumido durante el mes de estudio por los clientes?
  - ¿A partir de cuantos minutos se encuentra el 25% de los clientes con mayores consumos?
  - Si a todos los clientes que consumen entre 160 y 220 minutos, la empresa de telefonía móvil, les obsequia 100 minutos el fin de semana, para llamadas a otros operadores ¿Qué porcentaje de clientes se hacen acreedores al premio?
- (10%)**
2. Una academia de idiomas cuenta con 240 estudiantes. 60 estudian inglés y 130 estudian francés. El 10% de los que estudian inglés, estudian francés. Se escoge un estudiante al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de que no estudie ninguno de estos idiomas?
  - ¿Cuántas personas no estudian francés, dentro del grupo de los que estudian inglés?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que estudie al menos uno de estos idiomas?
  - ¿Cuántas personas estudian solamente inglés o solamente francés?
- (10%)**
3. En promedio, 12% de las personas que se inscriben al programa de entrenamiento de controladores de tráfico del Departamento Federal de Aviación tendrá que repetir el curso. Si el tamaño actual de un cierto grupo es de 15, calcule las probabilidades de los siguientes eventos:
- Menos de 5 tengan que repetir el curso
  - Más de 12 aprueben el curso
- (10%)**
4. Una máquina embotelladora de bebidas ligeras pone la tapa correctamente en el 99.5% de las veces si la máquina está bien ajustada, pero sólo un 80% cuando no lo está. Si existe una probabilidad del 10% de que la máquina esté desajustada, ¿Cuál es la probabilidad de que una botella elegida al azar esté tapada correctamente?
- (10%)**
5. El porcentaje de impurezas por lote en un producto químico es una variable aleatoria  $X$  con función de densidad
- $$f(x) = \begin{cases} cx^2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro punto} \end{cases}$$
- Encuentre el valor de  $c$
  - Un lote con más de 40% de impurezas no puede venderse. ¿Cuál es la probabilidad de que un lote elegido aleatoriamente no pueda venderse debido al exceso de impurezas?
- (15%)**
6. Por estudios estadísticos, se sabe que la llegada de aviones a un aeropuerto se comporta según una distribución de Poisson a un promedio de 45 aviones por hora.
- Hallar la probabilidad de que en un minuto lleguen al menos 2 aviones.
  - Hallar la probabilidad de que el tiempo entre llegadas consecutivas de aviones sea superior a 3 minutos.
  - Suponga que un avión demora 2 minutos utilizando la pista, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente avión que llegue, tenga que esperar?

**(25%)**

7. Una fábrica de jugo de manzana emplea una máquina para envasarlo que llena automáticamente botellas de 16 onzas. No obstante, la cantidad de jugo que se vierte cada día varía. Se observó que la cantidad de jugo contenido en las botellas se aproxima a una distribución normal con una media de 16 onzas y una desviación estándar de 1 onza.
- Si las botellas tienen una capacidad máxima de 18.5 onzas, ¿Qué porcentaje de botellas tendrá derrame del jugo?
  - Halle el valor de llenado de las botellas tal que solamente el 15% tendrá mayor contenido de jugo.
  - ¿Entre cuáles dos valores de llenado de la máquina simétricamente distribuidos alrededor de la media, se encontrará el 95% de todo el llenado de botellas?
- (20%)**

### FÓRMULAS DE INTERÉS

Cálculo de Media para datos agrupados

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i' * f_i}{n}$$

Función de distribución acumulada para datos agrupados

$$F(X) = F(l_{inf}) + \frac{f_i}{C} * (X - l_{inf})$$

$l_{inf}$  : limite inferior del intervalo de X

C: ancho del intervalo

$f_i$  : frecuencia relativa del intervalo de X

Definición de probabilidad condicional

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definición de probabilidad Total

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_k)$$

$B_1, B_2, \dots, B_k$  : mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos

Teorema de Bayes:

$$P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i)P(B_i)}{P(A / B_1)P(B_1) + P(A / B_2)P(B_2) + \dots + P(A / B_k)P(B_k)}$$

Combinación

$$nC_x = \frac{n!}{(n-x)! * x!}$$

Distribución de probabilidad Binomial

$$P(x) = nC_x * \pi^x * (1-\pi)^{n-x}$$

Distribución de probabilidad de Poisson

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^x}{x!}$$

Propiedades de las funciones para variables aleatorias continuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad f(x) : \text{función de densidad de probabilidad}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{función de distribución acumulada}$$

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Función de densidad Exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad x > 0, \beta > 0 \text{ constante} \quad \text{o} \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}; \lambda = \frac{1}{\beta}$$

Fórmula de transformación para la distribución normal estándar

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$