4 Hechos estilizados de las series de rendimientos: una ilustración para Colombia.

Primera Versión para comentarios

Junio 2005

Julio César Alonso[1]
jcalonso@icesi.edu.co
Profesor Departamento de Economía
Universidad Icesi.

Mauricio Alejandro Arcos
Estudiante de Economía y Negocios Internacionales
Universidad Icesi.

Dirección de correspondencia
Calle 18 No. 122-135, Cali, Colombia

Resumen:

En este documento empleamos las series de la Tasa Cambio Representativa de Mercado y el Índice General de la Bolsa Colombia para ilustrar 4 hechos estilizados muy conocidos en la literatura financiera: i) las series de precios siguen un camino aleatorio, ii) la distribución de los rendimientos es leptocúrtica y exhibe colas pesadas, iii) a medida que se calculan los rendimientos para periodos de tiempo más amplios su distribución se acerca más a la distribución normal, y iv) los rendimientos presentan Volatilidad agrupada (volatility clustering).

Abstract:
This paper employs the exchange rate and Colombian main stock exchange index to illustrate four well-known stylized facts of the financial time series. These facts are: i) prices follow a random walk process, ii) returns exhibit a leptokurtic distribution with fat tails, iii) as one increases the time scale over which returns are calculated, their distribution tends to "look like" a normal one (Agreggational Gausianity), and iv) returns presents volatility clustering.

Palabras claves:
Rendimientos financieros, Regularidades empíricas, Tasa de Cambio, Índice General de la Bolsa Colombia, volatility clustering, fat tails.
Clasificación JEL: F310, C220, G000

---

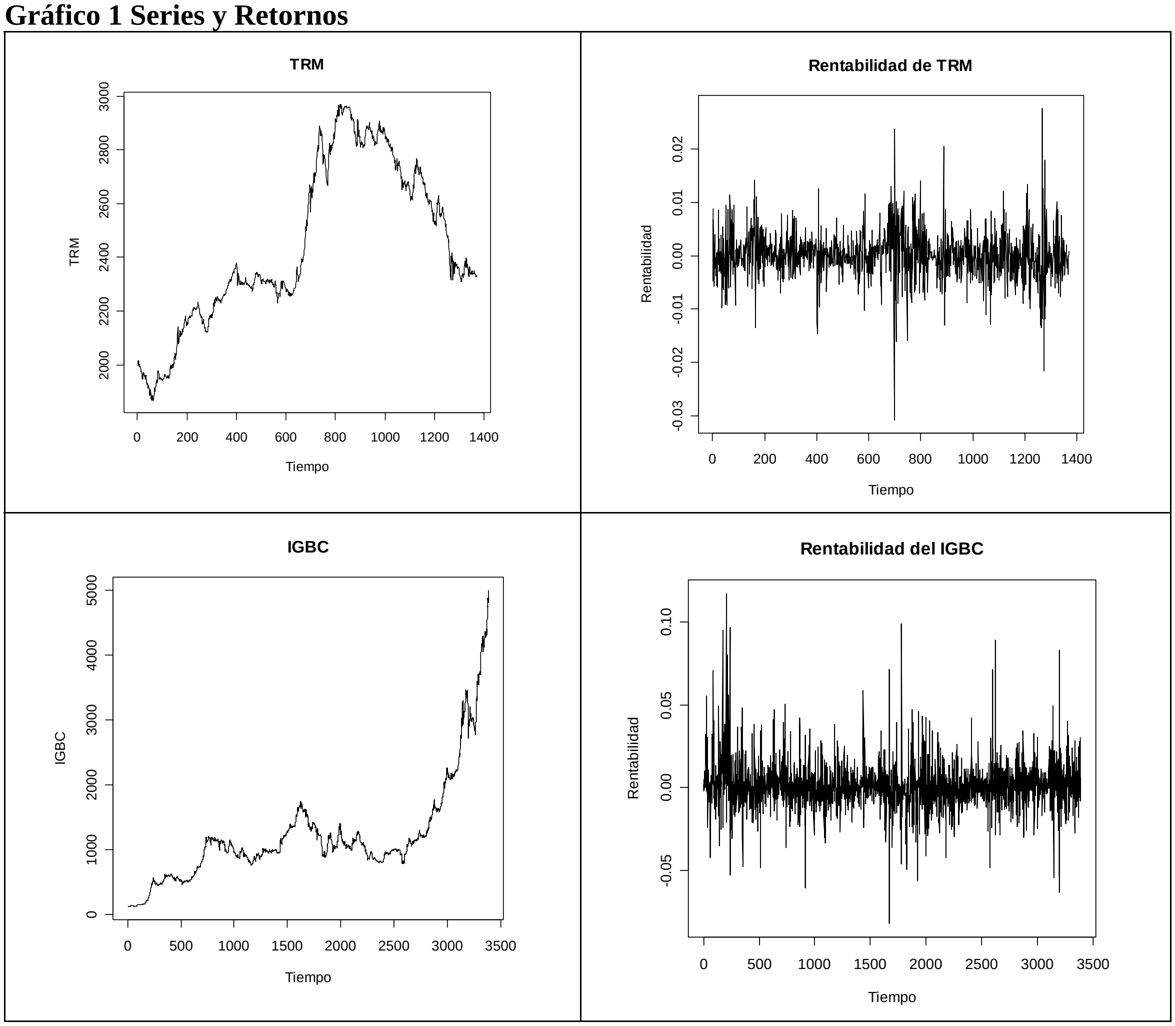
[1] Los autores agradecen la financiación de este proyecto al Fondo de Investigaciones de la Universidad Icesi. Naturalmente, la responsabilidad de las ideas expresadas en este documento comprometen únicamente a los autores.

Las series de rendimientos de activos (o portafolios) financieros poseen unas regularidades empíricas asombrosas que, en la mayoría de los casos, se encuentran presentes sin importar el mercado en que sean tranzados o el tipo de activo. Estas regularidades empíricas se conocen en la literatura especializada como hechos estilizados y han sido documentadas por diferentes autores (Ver por ejemplo a Cont (2001) y Vries (1994)).

En este documento, repasamos algunos de esos hechos estilizados y los ilustraremos con los rendimientos de dos activos colombianos y de un portafolio representativo de las acciones transadas en la Bolsa de Colombia (la cesta representativa).

En el Gráfico 1 se pueden observar tanto la serie de la tasa representativa diaria de mercado (TRM) en Colombia para el periodo correspondiente desde el 25 de septiembre de 1999 al 31 de abril de 2005, y el Índice General de la Bolsa Colombia (IGBC) de 21 de enero de 1991 a1 21 de febrero de 2005, así como sus rendimientos.

Gráfico 1 Series y Retornos



Como se puede observar, el comportamiento de los rendimientos (diferencia en los logaritmos) de ambas series presentan similitudes asombrosas. En el resto del documento nos centraremos en esas características, tanto de los rendimientos como de las series, que denominamos hechos estilizados. Antes de continuar, es importante aclarar que este documento no tiene como intención demostrar o brindar explicación al origen de estos hechos estilizados, pero si pretende brindar evidencia sobre la presencia de ellos en las series seleccionadas.

Hecho estilizado 1: Camino aleatorio.

En el Gráfico 1 se puede notar el comportamiento de la TRM y del IGB es errático y difícilmente a simple vista se puede determinar la dirección que tomará la serie en el siguiente período. Formalmente, si denotamos el precio de un activo (o el valor de un portafolio) por p_t, entonces el comportamiento de las realizaciones de p_t parecen ser tal que la mejor forma para predecir el precio del activo en el siguiente periodo es emplear el valor del periodo anterior. En otras palabras, los precios (o sus logaritmos) parecen ser la realización de un proceso estocástico denominado ***camino aleatorio*** o ***proceso de martingala***, según sea el caso.

Este hecho implica que el comportamiento del precio del activo corresponde a la siguiente ley de movimiento:

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

donde ε_t es un proceso estocástico con $\mathrm{E}\left[\varepsilon_t\right] = 0$. Si ε_t proviene de una sola distribución, entonces el proceso (1) se denomina un camino aleatorio, si por el contrario ε_t proviene de diferentes distribuciones, entonces (1) se denomina un proceso de martingala. En términos más formales, esto implica que el proceso generador de los datos de los precios son integrados de orden uno (I(1)) o también conocidos como procesos con una raíz unitaria.

Este hecho estilizado implica: i) ausencia de correlación en los retornos, ii) la no existencia de predictibilidad del desempeño de los precios y iii) formación eficiente de los precios.

En el caso de nuestras tres series, intuitivamente esta característica puede ser observada en el Gráfico 1. Pero para estar seguros de esta propiedad de las series podemos efectuar pruebas estadísticas de estacionarieda (o conocidas como de raíces unitarias en la literatura econométrica de series de tiempo) que soporten dicha observación. Los resultados de cuatro pruebas diferentes de raíces unitarias aplicadas a cada una de las series se presentan en el Apéndice 1, estos resultados brindan evidencia para determinar que las tres series son I(1), es decir cumplen el primer hecho estilizado.

Hecho estilizado 2: Colas pesadas de la distribución de los retornos.

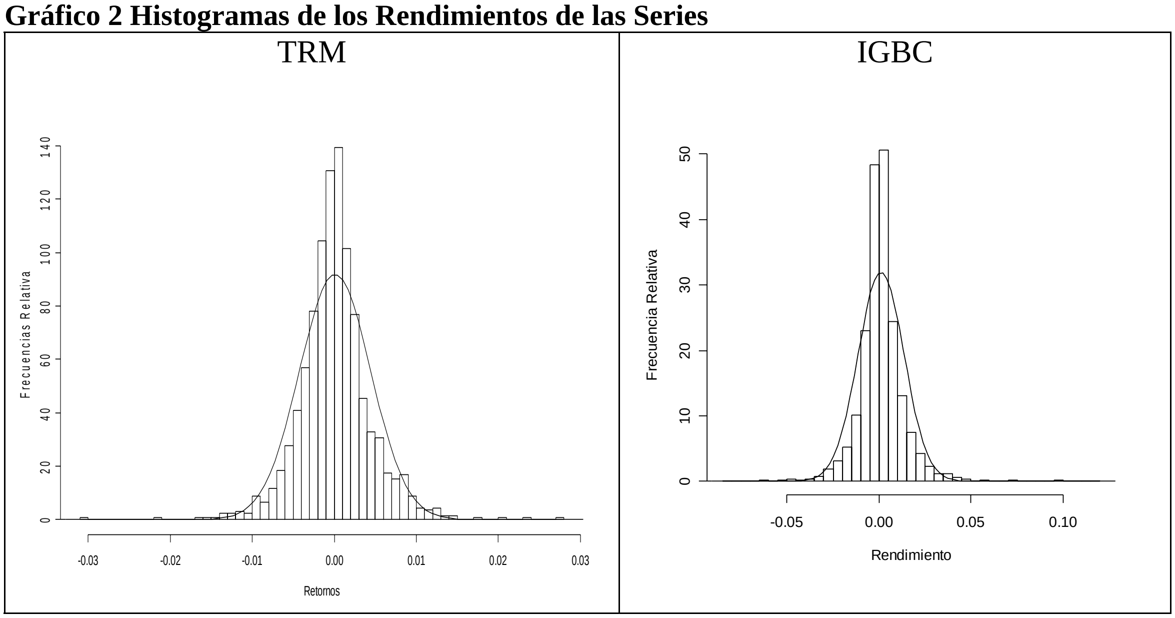
La distribución (no condicional) de los rendimientos financieros concentró gran parte de la investigación del campo de la econometría financiera en los 70. Esta distribución acumulada (no condicional) se define como:

$$F(x) = P(r_t \leq x) \tag{2}$$

Donde r_t corresponde al rendimiento continuo del activo para el periodo t $\left(r_t = \ln(p_t) - \ln(p_{t-1})\right)$. En especial, la función de densidad o pdf (la derivada de la función de distribución), $f(x) = F'(x)$, de los rendimientos tiene características similares a la normal como la simetría y la forma "acampanada".

Pero existe una gran diferencia entre las distribuciones empíricas de los rendimientos (representada por los histogramas) y la distribución normal; las distribuciones de los rendimientos tienden a ser más "picuda" o leptocúrtica que la distribución normal y posee colas más pesadas. En la práctica las colas pesadas ("fat tails") implican que existe mayor probabilidad de obtener valores extremos (observaciones alejadas muy alegadas de la media) que la que existiría en una distribución normal.

Gráfico 2 Histogramas de los Rendimientos de las Series



Este hecho se puede observar en el Gráfico 2 al cuál se le ha sobrepuesto al histograma la correspondiente distribución normal. Estos resultados gráficos se pueden corroborar con las estadísticas descriptivas de cada una de las muestras que se reportan en la Tabla 1.

Tabla 1. Resumen Estadístico de las muestras

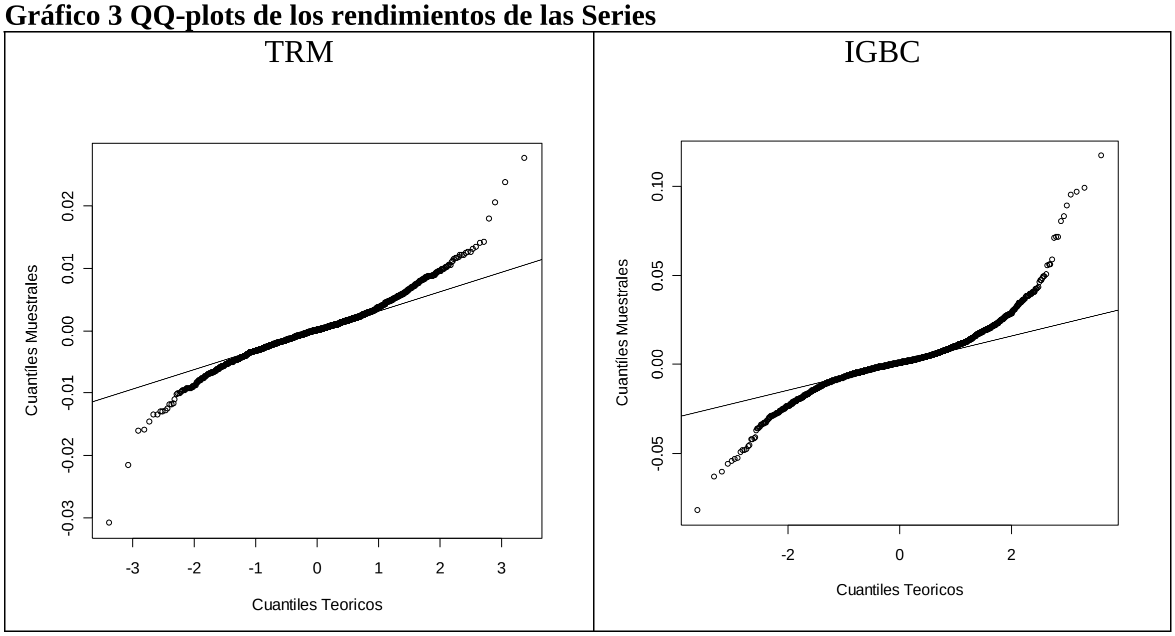
	Retornos TRM	Retornos IGBC
Media	0.000113942	0.001118451
Varianza	1.88828E-05	0.000156233
Coeficiente de Asimetria	0.1070825	0.9958895
Curtosis	4.982253	10.26843
Jarque-Bera	1426.238***	15467.95***

*** Se puede rechazar la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza.

Como era de esperarse, las estadísticas descriptivas también refuerzan la evidencia a favor de la no-normalidad de la rentabilidad diaria. En ambos casos es evidente que las distribuciones muéstrales son leptocúrticas. También existe alguna evidencia de asimetría, aunque como lo puntualizan Guermant y Harris (2002), en presencia de exceso de curtosis dicha asimetría es difícil de interpretar.

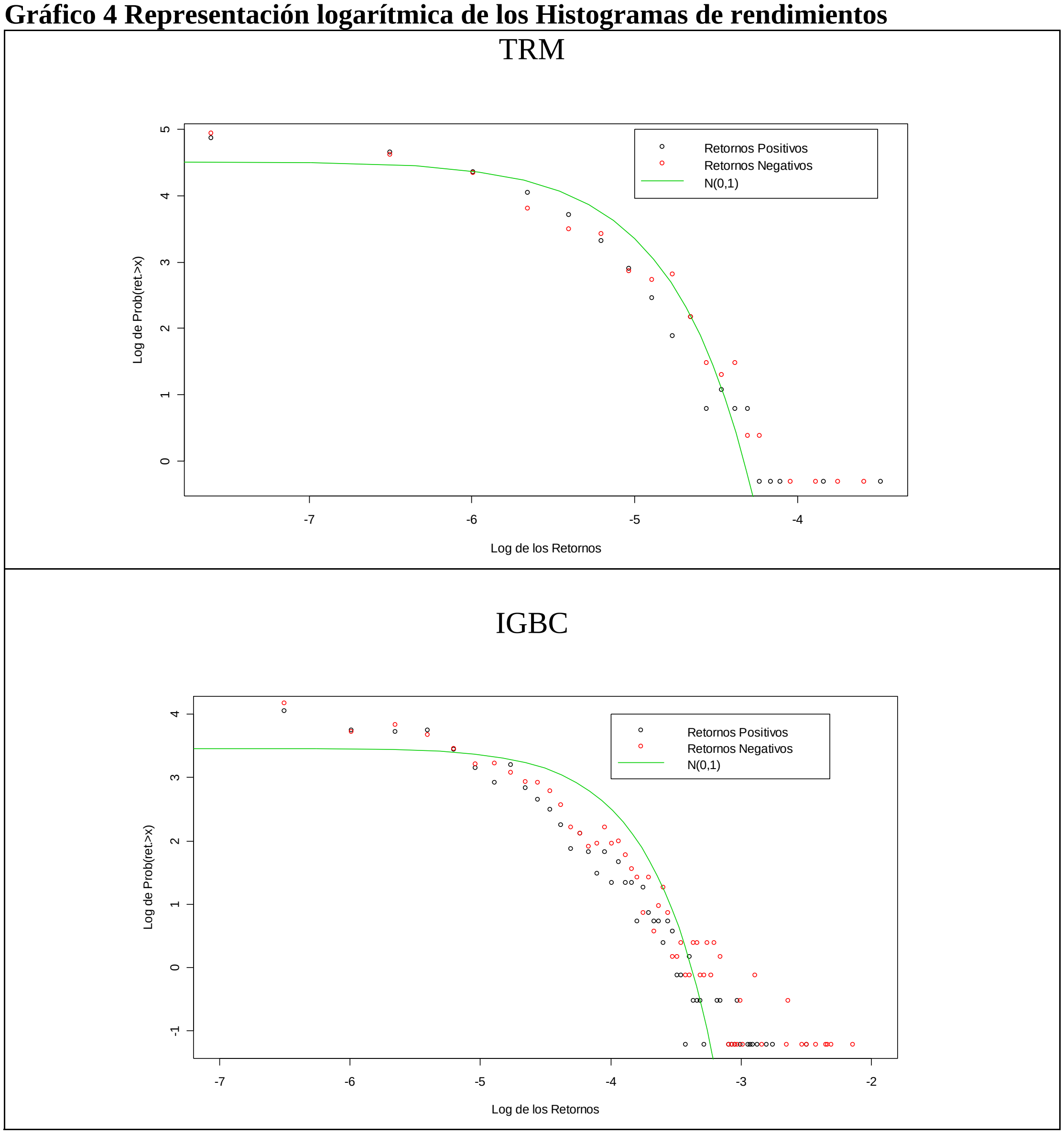
La no-normalidad de la distribución de los rendimientos también se puede observar gráficamente mediante el diagrama de probabilidad normal (normal probability plot o qq plot). Este gráfico representa la relación entre los cuantíales muestrales y los teóricos de una distribución normal, si la muestra proviene de una distribución normal, entonces los puntos muestrales deberían estar sobre una línea recta. En el Gráfico 3 se puede observar claramente como las colas de la distribución son más pesadas (“fat tails”) que la distribución normal. En otras palabras la probabilidad de obtener valores extremos es mucho mayor en la distribución empírica de los rendimientos que lo que predice una distribución normal.

Gráfico 3 QQ-plots de los rendimientos de las Series



Una manera de apreciar claramente la presencia de colas pesadas es por medio de la representación logarítmica de los histogramas. En esta representación al emplearse una escala logarítmica se observa con mayor detenimiento el comportamiento de la distribución maestral frente al de una distribución normal. En el Gráfico 4 podemos observar como la probabilidad de los valores extremos de las muestras es mucho mayor que lo esperado en la normal. Así, estas dos series son un buen ejemplo del hecho estilizado de que los rendimientos son leptocúrticos y presentan colas pesadas. Este hecho ha obligado a que se adopten aproximaciones como la teoría de los valores extremos al momento de estudiar los rendimientos de los activos, en especial porque los valores extremos son los más importantes para los actores de los mercados financieros y reguladores.

Gráfico 4 Representación logarítmica de los Histogramas de rendimientos



Hecho estilizado 3: Normalidad Agregada (Aggragational Gausianity)

Una característica interesante que presentan las series de retornos de los activos es que si bien su distribución no es normal, como se discutió anteriormente; a medida que los rendimientos se calculan para periodos más grandes la distribución de ellos tiende a parecerse más a una distribución normal (si bien no necesariamente seguirán una distribución normal). En otras palabras, la forma de la distribución de los rendimientos no es la misma para diferentes escalas de tiempo. Este fenómeno se conoce con el nombre de normalidad agregada.

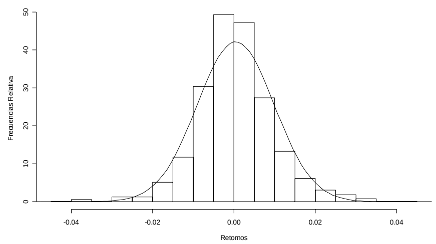
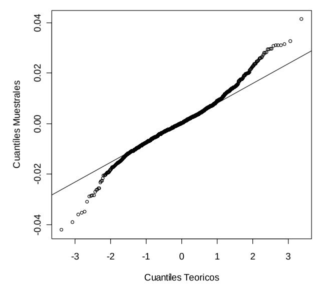
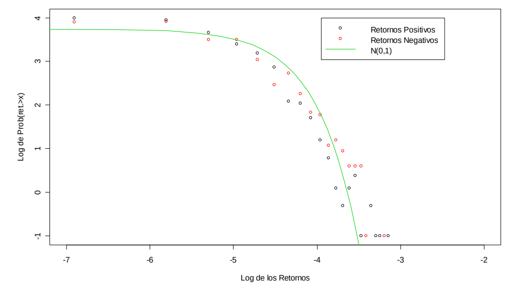
Así este hecho implica que si se compara la distribución de los rendimientos diarios con los de los rendimientos mensuales, trimestrales, semestrales y anuales, se observa que estos últimos tienen un comportamiento más parecido al de una distribución normal.

Como se puede observar en el Gráfico 5, las características de la distribución de los rendimientos tienden a ser cada vez más similar a la distribución normal, a medida que la escala de tiempo se agranda; en especial las colas tienden a ser menos pesadas y la leptocurtosis menos pronunciada o desaparece. No obstante, el comportamiento de los rendimientos aún no es lo que se esperaría de una distribución normal. (Ver Anexo 2 para observar las pruebas de normalidad de Jarque-Bera, así como los demás estadísticas descriptivas. En ese mismo anexo se presentan los correspondientes gráficos para la serie IGBC.)

Así, este hecho estilizado implica la necesidad de estudiar por separado las características de los rendimientos de un mismo activo dependiendo de la escala de tiempo. También es claro, que entre menor sea la periodicidad estudiada, más alejada estará la distribución de los rendimientos de la normalidad.

Gráfico 5 Rendimientos de la TRM para diferentes escalas de tiempo

Rendimientos Semanales

Histograma	Q-q Plot	Representación logarítmica del Histograma
		

Rendimientos Mensuales

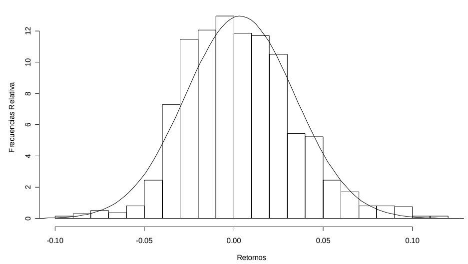
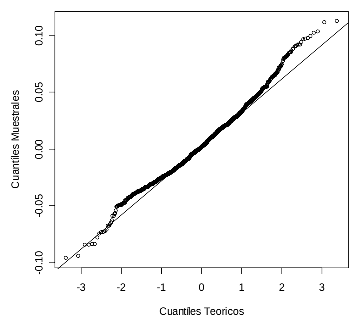
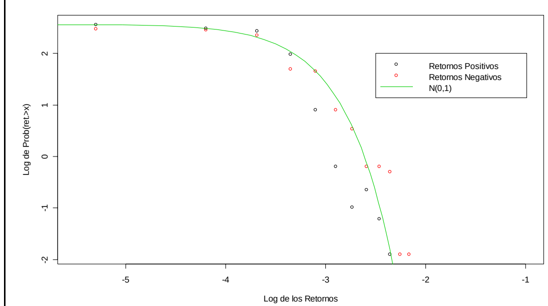
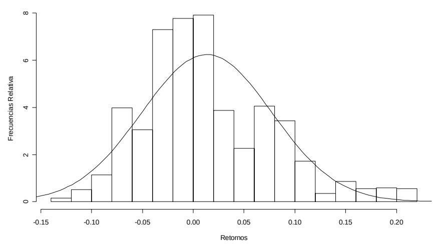
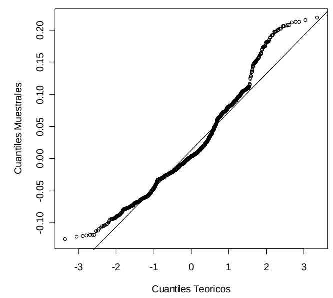
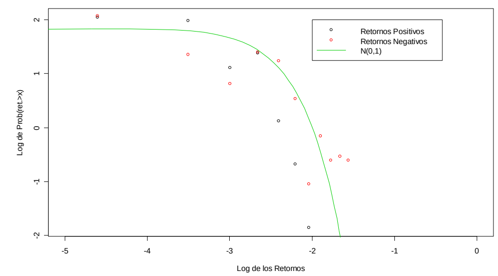
Histograma	Q-q Plot	Representación logarítmica del Histograma
		

Gráfico 5. Rendimientos de la TRM para diferentes escalas de tiempo. (Cont.)

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">Rendimientos Trimestrales</td></tr>
<tr><td align="center">Histograma</td><td align="center">Q-q Plot</td><td align="center">Representación logarítmica del Histograma</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Hecho estilizado 4: Volatilidad no constante y agrupada (Volatility clustering)

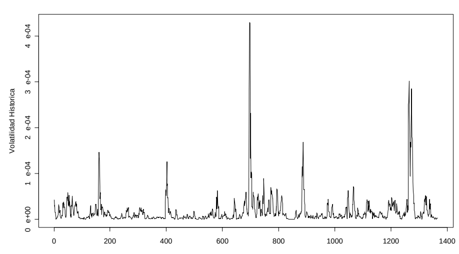
Como se puede observar en el Gráfico 1, los rendimientos muestran una gran variabilidad (volatilidad). En otras palabras, la desviación que presentan los rendimientos respecto a su media es muy cambiante. Pero no sólo eso, la volatilidad tiende a “agruparse” o presentar clusters (volatility cluster), pues episodios de gran volatilidad tienden a estar seguidos de periodos de alta volatilidad y viceversa.

Este hecho estilizado puede ser observado para nuestras series de rendimientos empleando diferentes medidas de volatilidad. Por ejemplo, podemos emplear la volatilidad histórica[2] para diferentes ventanas: 5 días (una semana), 10 días (dos semanas), 15 días (tres semanas) y 20 días (un mes).

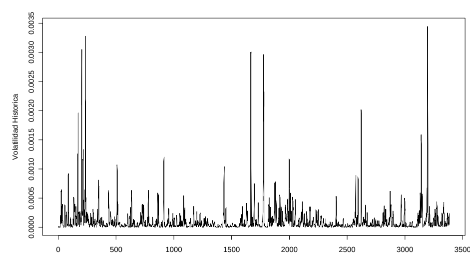
Gráfico 6 Volatilidad histórica de los rendimientos de ambas series

Volatilidad histórica con una ventana de una semana

TRM

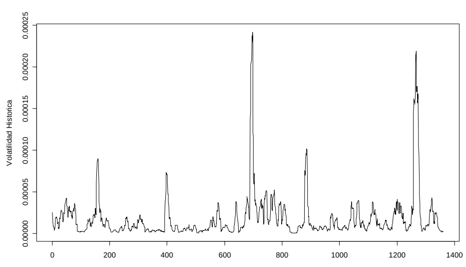


IGBC

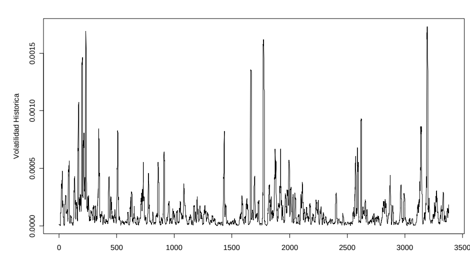


Volatilidad histórica con una ventana de dos semanas

TRM

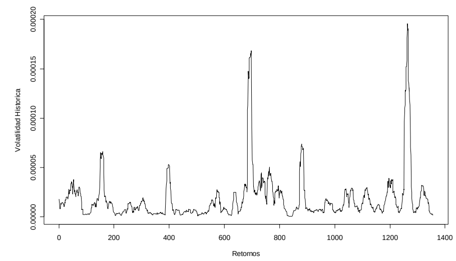
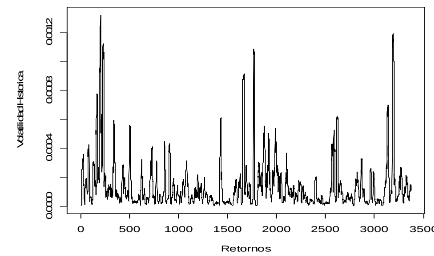
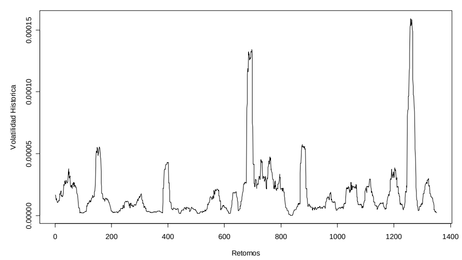
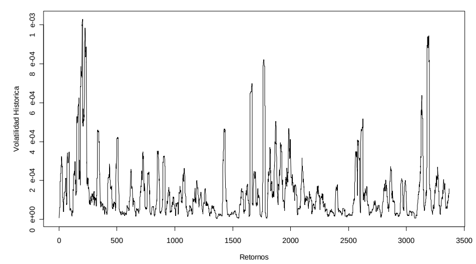


IGBC



[2] El término volatilidad histórica se refiere a calcular la varianza para los últimos h datos (ventana) para cada una de las observaciones. Es decir, siempre se calculará la varianza con los últimos h datos, donde h es una constante.

Gráfico 6. Volatilidad histórica de los rendimientos de ambas series (Cont.)

<table>
<tr><td colspan="2">Volatilidad histórica con una ventana de tres semanas</td></tr>
<tr><td>TRM

</td><td>IGBC

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Volatilidad histórica con una ventana de un mes</td></tr>
<tr><td>TRM

</td><td>IGBC

</td></tr>
</table>

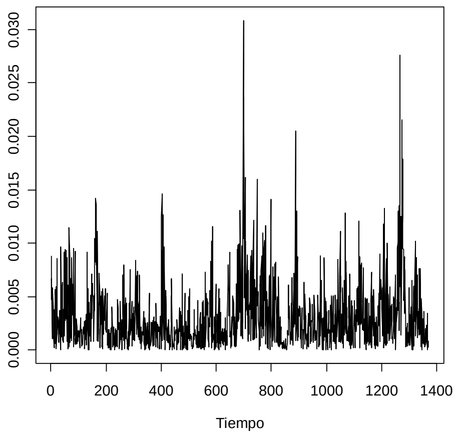
Como se puede observar en el Gráfico 6, empleando diferentes ventanas, la volatilidad de las series de los rendimientos no es constante a través del período de estudio. Existen otras maneras de medir la volatilidad como emplear el valor al cuadrado de los rendimientos o su valor absoluto[3]. Cualquiera de estas medidas mostrará el mismo fenómeno: la volatilidad de los rendimientos no es constante (Ver Gráfico 7).

[3] Los rendimientos al cuadrado se emplean como medida de volatilidad dado que los rendimientos comúnmente presentan un promedio estadísticamente igual a cero, entonces la expresión $(R_t - \mu)^2$ será equivalente al cuadrado de los rendimientos. Así, el cuadrado de los rendimientos muestra la desviación con respecto a la media. Igual razonamiento justifica la utilización del valor absoluto de los rendimientos como medida de la volatilidad.

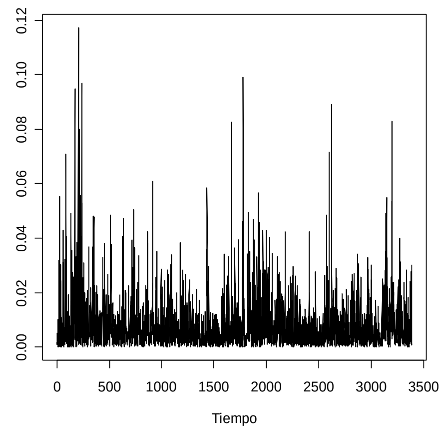
Gráfico 7 Otras medidas de la volatilidad de los rendimientos de ambas series

Valor absoluto de los Rendimientos

TRM

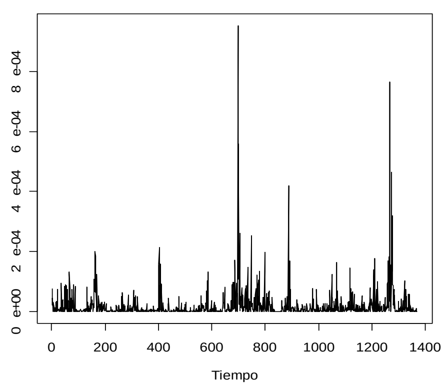


IGBC

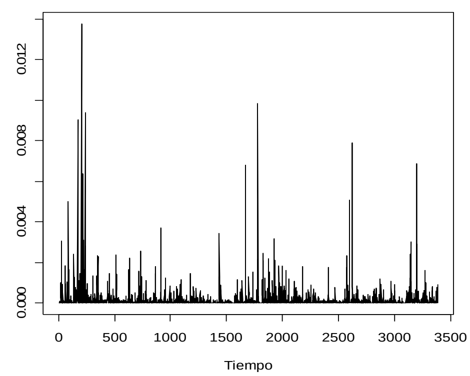


Cuadrado de los Rendimientos

TRM



IGBC

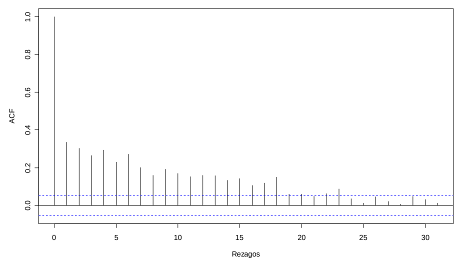


Por otro lado, existe una fuerte relación entre la volatilidad en un período determinado y las volatilidades pasadas. La función de autocorrelación (ACF por su sigla en inglés) del valor absoluto de los rendimientos (o el cuadrado de ellas) es una manera sencilla de estudiar la relación lineal entre la volatilidad. (Ver Gráfico 8)

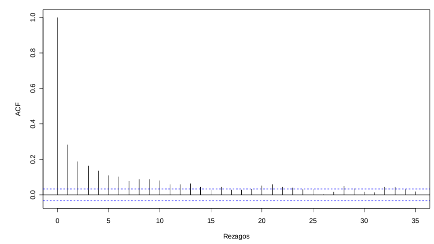
Gráfico 8 Correlación de la Volatilidad de los rendimientos de ambas series[4]

ACF del valor absoluto de los Rendimientos

TRM

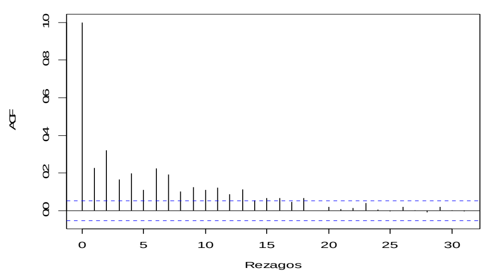


IGBC

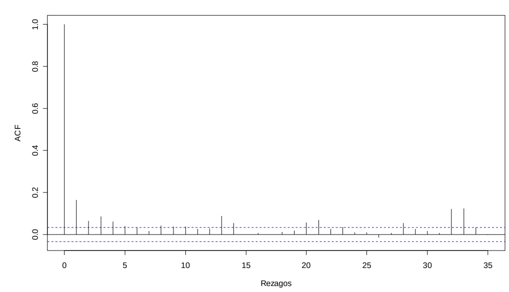


ACF del Cuadrado de los Rendimientos

TRM



IGBC



El Gráfico 8 demuestra la presencia de correlación entre diferentes períodos de la volatilidad de los rendimientos. Es decir, la volatilidad de un periodo determinado está relacionada con los valores pasados de esta, en otras palabras existe volatilidad agrupada (volatility clustering).

Este hecho implica que la volatilidad presenta un patrón de comportamiento que potencialmente podría ser modelado estadísticamente de tal forma que se puedan brindar pronósticos de la volatilidad.

Usualmente, los trabajos empíricos emplean modelos estadísticos como el de heteroscedasticidad condicional auto-regresiva generalizado, GARCH(p.q) por su nombre en inglés. Este modelo implica que:

$$R_t = \mu + \upsilon_t \tag{3}$$

Donde la varianza condicional del término de error υ_t (σ_t^2) se supone que seguirá el siguiente patrón:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \upsilon_{t-i}^2 \tag{4}$$

con $p, q, \alpha_i, \beta_i \geq 0$ y $\alpha_0 > 0$.

[4] La línea punteada corresponde a un intervalo de un nivel de confianza del 99% dentro del cual la autocorrelación muestral no es significativamente diferente de cero.

En resumen, este hecho estilizado implica que variaciones grandes en los precios tienen mayor probabilidad de ser seguidos por variaciones grandes en el precio. Así, existe la necesidad de modelar la volatilidad de los rendimientos con métodos estadísticos que permitan capturar la variabilidad de la volatilidad al momento de considerar el riesgo asociado a las series de rendimientos.

Comentarios finales

En este documento hemos ejemplificado con las series de la Tasa Cambio Representativa de Mercado y el Índice General de la Bolsa Colombia 4 hechos estilizados muy conocidos en la literatura financiera: i) las series de precios siguen un camino aleatorio, ii) la distribución de los rendimientos es leptocúrtica y exhibe colas pesadas, iii) a medida que se calculan los rendimientos para periodos de tiempo más amplios su distribución se acerca más a la distribución normal, y iv) los rendimientos presentan Volatilidad agrupada (volatility clustering).

Estos hechos estilizados asombrosamente se encuentran presentes en la mayoría de las series de rendimientos (y precios) sin importar que tipo de modelo o supuestos paramétricos se efectúen. Así, estos hechos estilizados deben ser entendidos como una restricción para cualquier modelo empírico y teórico que se emplee para explicar el comportamiento de los precios de los activos o medidas de volatilidad. De hecho, todo el desarrollo resiente en el cálculo del VaR (Valor en riesgo por su sigla en inglés) tratan de incorporar estos hechos estilizados en las estimaciones (Ver Alonso y Arcos (2005)).

Finalmente es importante anotar, como lo hace Rama (2001), que una pregunta aún sin resolver es si estos hechos empíricos pueden ser empleados o no para ratificar o descartar aproximaciones de la teoría económica a la explicación de la realidad.

Referencias

Alonso C., Julio César and Mauricio Alejandro Arcos. 2005. "Valor en riesgo: evaluación del desempeño de diferentes metodologías para 7 países latinoamericanos." *Mimeo*.

Breitung, Jorg. 2002. "Nonparametric Tests for Unit Roots and Cointegration." *Journal of Econometrics.*, 108:2, pp. 343-63.

Cont, Rama. 2001. "Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues." *Quantitative Finance*, 1:2, pp. 223-36.

Dickey, David A. and Wayne A. Fuller. 1979. "Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root." *Journal of the American Statistical Association*, 74:366, pp. 427-31.

Guermat, Cherif and Richard HArris. 2002. "Forecasting value at risk allowing for time variation in the variance and kurtosis of portfolio returns." *International Journal of Forecasting*, 18, pp. 409-19.

Kwiatkowski, Denis, Peter C. B. Phillips, Peter Schmidt, and Yongcheol Shin. 1992. "Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root: How sure are we that economic time series have a unit root?" *Journal of Econometrics*, 54:1-3, pp. 159-78.

Phillips, Peter C. B. and Pierre Perron. 1988. "Testing for a unit root in time series regression." *Biometrika*, 75:2, pp. 335-46.

Vries, C. G. de. 1994. "Stylized Facts of Nominal Exchange Rate Returns," in *The Handbook of International Macroeconomics.* F. van der Ploeg ed. Oxford: Blackwell, pp. 348 - 89.

Apéndice 1. Pruebas de Estacionariedad para las series.

Para determinar si una serie de tiempo corresponde a un proceso generador de los datos de un camino aleatorio (proceso con raíz unitario o integrado de orden uno I(1)) se emplean convencionalmente pruebas de raíces unitarias como las de Dickey y Fueller (1979) en su versión aumentada (ADF), y la de Phillips y Perron (1988) (PP). Para ambas pruebas, bajo la hipótesis nula consiste en que el proceso sigue un camino aleatorio mientras que la hipótesis alterna corresponde a un proceso ARMA estacionario. Así mismo, consideramos la prueba no-paramétrica de raíces unitarias de Breitug (2002) que sigue la misma lógica de las anteriores pruebas.

Finalmente, se recurre también a la prueba de KPSS (Kwiatkowski y otros (1992)) que implica alternar las hipótesis nula y alterna de las pruebas ADF y PP. Los resultados de estas pruebas se presentan en la Tabla 2, los cuales corroboran la existencia de una raíz unitaria en las series.

Tabla 2. Pruebas de Raíces Unitarias para las Series de TRM e IGBC en niveles y logaritmos

	ADF /1	PP	Breitung (2002) /2	KPSS
TRM_t	-0.217	-0.340	0.016	0.730 ++
$LN(TRM_t)$	-0.191	-0.290	0.016	0.750 ++
$IGBC_t$	2.740	8.780	0.010	0.869 ++
$LN(IGBC_t)$	-2.429	-7.850	0.009	0.840 ++

ADF, PP y Breitung (2002): Corresponden a los respectivos estadísticos de la prueba de estacionaridad de Dickey - Fuller, Phillips - Perron y Breitung (2002).

KPSS: Corresponde al estadístico de la prueba de raíces unitarias de Kwiatkowski, Phillips, Scmidt y Shin (1992).

(º): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 10%

(ºº): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 5%

(ººº): Rechaza la hipótesis nula de un proceso con raíz unitaria a un nivel de significancia del 1%

(+): Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 10%

(++): Rechaza la hipótesis nula de un proceso estacionario alrededor de una tendencia a un nivel de significancia del 5%

/1: El número optimo de rezagos se determina de acuerdo al criterio de información Akaike (AIC).

Anexo 2. Más evidencia sobre el Hecho 3.

Tabla 3. Resumen estadístico de los rendimientos de la TRM.

	Semanales	Mensuales	Trimestrales
Media	0.000436472	0.003618795	0.0133286
Varianza	8.97179E-05	0.000948644	0.00409112
Coeficiente de Asimetria	0.1050629	0.368751	0.7252467
Curtosis	1.784831	0.4867702	0.4787708
Jarque-Bera	185.3957***	44.0156***	125.1721***

***Se puede rechazar la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza.

Tabla 4. Resumen estadístico de los rendimientos de la IGBC.

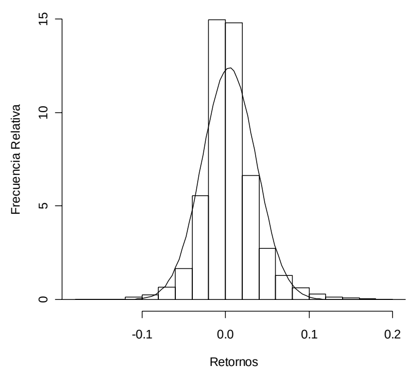
	Semanales	Mensuales	Trimestrales
Media	0.001981157	0.02844121	0.08200917
Varianza	0.001035533	0.01175361	0.04512509
Coeficiente de Asimetria	0.5735873	0.786204	1.333427
Curtosis	3.247405	2.519107	4.671
Jarque-Bera	1676.536***	1238.303***	4000.461***

***Se puede rechazar la hipótesis nula de Normalidad con un 99% de confianza.

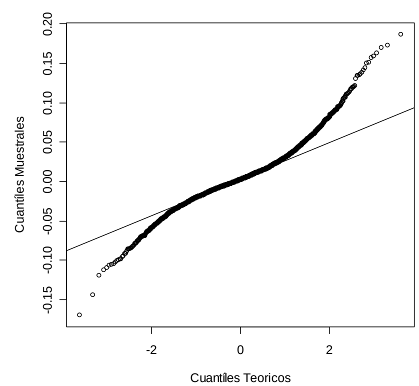
Gráfico 9 Rendimientos del IGBC para diferentes escalas de tiempo

Rendimientos Semanales

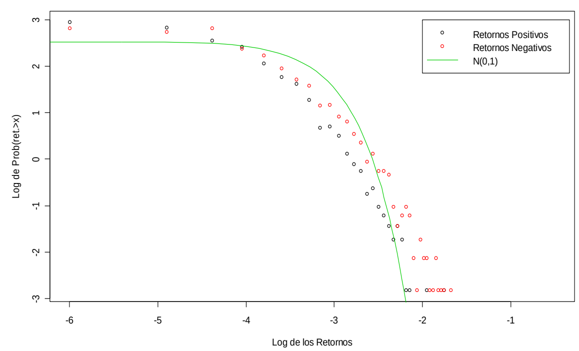
Histograma



Q-q Plot

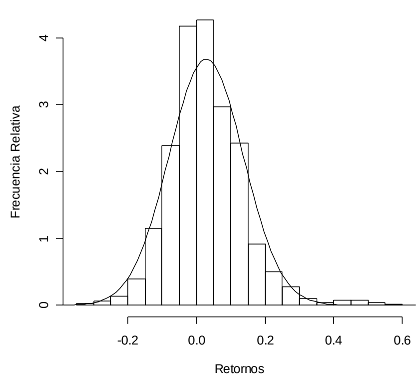


Representación logarítmica del Histograma

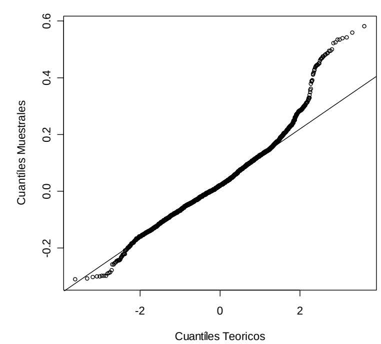


Rendimientos Mensuales

Histograma



Q-q Plot



Representación logarítmica del Histograma

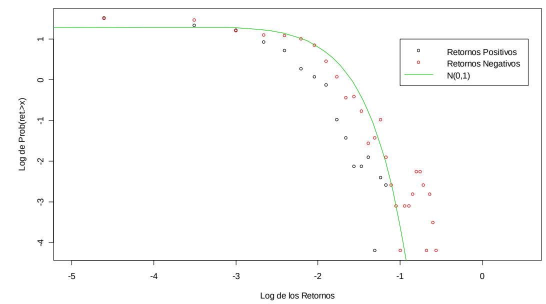


Gráfico 9. Rendimientos del IGBC para diferentes escalas de tiempo (Cont.)

Rendimientos Trimestrales		
Histograma	Q-q Plot	Representación logarítmica del Histograma