UNIVERSIDAD ICESI

Departamento de Economía

Facultad de Ciencias Administrativas y Económicas

Icesi Economics Working Papers

Uso de los estimadores HC en presencia de heterocedasticidad multiplicativa

Andres Felipe Hoyos Martin

Icesi EWP No. 2

2015

Uso de los estimadores HC en presencia de heterocedasticidad multiplicativa

Andres Felipe Hoyos Martin
Docente Hora cátedra, Universidad Icesi

Icesi EWP No. 2
2015

Universidad Icesi

Editor:
Carlos Giovanni Gonzalez Espitia
Profesor tiempo completo, Universidad Icesi
cggonzalez@icesi.edu.co

Asistente editorial:
Andres Felipe Hoyos Martin
andres.hoyos1@correo.icesi.edu.co

Gestión Editorial
Departamento de Economía - Universidad Icesi

www.icesi.edu.co
Tel: 5552334. Fax: 5551441
Calle 18 # 122-135 Cali, Valle del Cauca, Colombia

Uso de los estimadores HC en presencia de heterocedasticidad multiplicativa

Andrés Felipe Hoyos Martín

Septiembre 2015

Resumen

Este trabajo muestra el uso de los tipos de matrices de covarianza consistentes de heterocedasticidad (HCCM, por sus siglas en ingles) o estimadores HC, en presencia de diferentes niveles de heterocedasticidad multiplicativa y diferentes tamaños de muestra. Además se analiza el comportamiento de estas con diferentes tipos de distribución de la variable independiente. Se realiza una simulación de Monte Carlo para observar el poder y el tamaño de la pruebas en la inferencia sobre el parámetro estimado que acompaña la variable independiente del modelo. Se encuentra que en presencia de niveles bajos de heterocedasticidad y muestras pequeñas, las pruebas pierden poder aunque se observa de manera general que la corrección HC3, es la mejor comportada.

Palabras clave: Heterocedasticidad multiplicativa, Matriz de covarianza consistente de heterocedasticidad.

Introducción

En presencia de heterocedasticidad, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios, a pesar de ser insesgado no es eficiente, lo que lleva a problemas de inferencia estadística sobre las pruebas de hipótesis realizadas al modelo. Dado que la heterocedasticidad, especialmente la multiplicativa es muy común en modelos de corte transversal, los métodos para corregir la heterocedasticidad son esenciales para el análisis de los coeficientes estimados.

Cuando la naturaleza de la heterocedasticidad es conocida, el problema puede resolverse fácilmente mediante mínimos cuadrados generalizados (GLS, por sus siglas en ingles), pero cuando esta es desconocida, es necesario utilizar diferentes métodos de corrección de la matriz de covarianza de los estimadores denominados HCCM. Los diferentes tipos de HCCM brindan una estimación consistente de la matriz de covarianzas de los parámetros estimados y permiten al investigador un análisis robusto de los estimadores, corrigiendo de esta manera la heterocedasticidad, inclusive sin saber nada de la forma de esta.

Al realizar un análisis sobre el poder y el tamaño de las pruebas realizadas con los diferentes correcciones HC, Davidson and MacKinnon (1993) encuentran que HC2 y HC3 deben ser utilizadas a favor de HC0, mientras que Long and Ervin (2000) encuentran que para muestras pequeñas ($N < 250$) algunas de las correcciones presentan inferencias incorrectas y solo HC3 funciona tanto en muestras grandes como pequeñas. Por otro lado, Godfrey (1978) y Tanizaki and Zhang (2001), realizan diferentes formas de probar y corregir la heterocedasticidad multiplicativa, aunque asumen que la naturaleza de esta se conoce en cierto modo, por lo que no aplican los tipos de corrección HCCM.

Debido a que la heterocedasticidad multiplicativa es un modelo generalizado de los tipos de heterocedasticidad más comunes, se utilizaran diferentes formas de esta dentro del trabajo, para probar de una manera más global el poder de las correcciones HCCM en diferentes tamaños de muestra.

1. Corrección del modelo de regresión lineal mediante HCCM

Considere el siguiente modelo de regresión lineal

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

Donde $E[\varepsilon] = 0$ y $E[\varepsilon\varepsilon'] = \mathbf{\Omega}$. Para este modelo, el mejor estimador lineal insesgado es $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ con varianza

$$\text{var}\left[\hat{\beta}\right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{1}$$

Si lo errores del modelo tienen varianza constante entonces $E[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2\mathbf{I}$ y la ecuación (1) se simplificará en

$$\text{var}\left[\hat{\beta}\right] = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{2}$$

Al estimar la varianza de los errores mediante los errores estimados del modelo $e_i = y_i - x_i\hat{\beta}$, se puede estimar la matriz de varianza covarianza de la siguiente forma

$$VARMC = \frac{\sum e_i^2}{N-K}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

Donde N es el número de observaciones de la muestra y K es el número de coeficientes estimados. VARCM puede ser definida como la matriz de covarianzas estimada, con la que se pueden realizar pruebas de hipótesis e intervalos de confianza para los coeficientes estimados.

Si el modelo presenta problemas de heterocedasticidad, VARMC no puede ser utilizado para realizar inferencia estadística, por lo que es necesario calcular var $\left[\hat{\beta}\right]$ de la ecuación 1, pero esto solo es posible si se conoce $\mathbf{\Omega}$. Debido a que generalmente no es posible conocer la naturaleza de la heterocedasticidad en el modelo, no es posible calcular o estimar $\mathbf{\Omega}$, por lo que se hace necesario corregir el modelo mediante el estimador HCCM.

La idea principal del estimador HCCM propuesta por White (1980), es estimar la matriz $\mathbf{\Omega}$ mediante los residuales estimados del modelo e_i^2, obteniendo que $\hat{\mathbf{\Omega}} = \text{diag}\left[e_i^2\right]$, al reemplazar en la ecuación (1) $\mathbf{\Omega} = \hat{\mathbf{\Omega}}$ da como resultado

$$\text{HC0} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\text{diag}\left[e_i^2\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{3}$$

HC0 es el primero de los estimadores HCCM y según lo mostrado por White (1980) este es un estimador consistente de var $\left[\hat{\beta}\right]$ cuando el modelo presenta problemas de heterocedasticidad.

MacKinnon and White (1985) presentaron una variación del estimador anterior, diseñado para tener un mejor desempeño en muestras pequeñas, ya que corrige por los grados de libertad del modelo y es denominado HC1

$$\begin{aligned} \text{HC1} &= \tfrac{N}{N-K}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\text{diag}\left[e_i^2\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \\ &= \tfrac{N}{N-K}\text{HC0} \end{aligned} \tag{4}$$

Adicional a los estimadores anteriores, se plantea un segundo enfoque donde se tiene en cuenta la composición de la varianza de los errores, puesto que si se define $h_{ii} = \mathbf{x}_i(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i'$, entonces se tiene que var $[e_i] = \sigma^2(1-h_{ii})$, de donde se puede encontrar un estimador menos sesgado de la varianza con la forma $\sigma_i^2 = e_i^2/(1-h_{ii})$ el cual es menos sesgado que el estimador de HC0. Basados en lo anterior y en el trabajo realizado por Horn et al. (1975), MacKinnon and White (1985) propusieron en estimador denominado HC2

$$\text{HC2} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\text{diag}\left[\frac{e_i^2}{1-h_{ii}}\right]\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{5}$$

Una tercera variación es propuesta por MacKinnon and White (1985), con el propósito de inflar aun más la varianza de los errores estimados y disminuir el sesgo existente entre esta y la varianza de los errores poblacionales, presentado de la siguiente forma

(6)

2. Modelo de heterocedasticidad multiplicativa

El modelo de heterocedasticidad multiplicativa propuesto por Harvey (1976) puede ser descrito de la forma

$$y_i = \mathbf{x}_i\beta + \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2) \tag{7}$$
$$\sigma_i^2 = \sigma^2\exp(\mathbf{z}_i'\alpha) \tag{8}$$

Donde $\mathbf{z}_i$ es el vector fila de la matriz de variables explicativas relacionadas con la varianza de los errores y α es el vector de coeficientes que determinan el nivel de heterocedasticidad generado en σ_i^2 de cada variable explicativa en $\mathbf{z}_i$.

El modelo descrito en las ecuaciones (7) y (8), incluye múltiples formas de heterocedasticidad analizadas como el modelo de Boscardin and Gelman (1996), donde $\mathbf{z}_i = \ln w_i$ y

$\alpha = -\theta$, adicionalmente según lo muestra Greene (2011) si reemplazamos z_i por el logaritmo natural de la variable explicativa, la varianza de los errores puede expresarse como

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 \mathbf{x}_i^\alpha$$

Ecuación con la que los investigadores se encuentran más familiarizada, cuando α toma valores de 1 o 2.

3. Experimento de Monte Carlo

Para examinar el comportamiento de los estimadores HCCM, se realizó un experimento de Monte Carlo con 1000 repeticiones y se tuvo en cuenta el siguiente modelo

$$y_i = 1 + x_i + \varepsilon_i \tag{9}$$

Donde la variable x_i se generó de dos formas diferentes, una con distribución uniforme entre 1 y 31 y otra con distribución normal de media 3 y varianza 1. Los errores del modelo se calcularon con una distribución normal de media 0 y con varianza calculada de acuerdo a la ecuación (8) de la forma

$$\sigma_i^2 = \gamma(x)\exp(x_i\alpha) \tag{10}$$

Donde $\gamma(x)$ es un escalar que asegura que la media de la varianza sea igual a 1 y se utilizan 6 diferentes valores para $\alpha = \{0; 0{,}25; 0{,}5; 1; 1{,}5; 2\}$, donde $\alpha = 0$ implica errores homocedasticos y $\alpha = 2$ con niveles altos de heterocedasticidad. Adicionalmente se incluyen los diferentes tamaños de muestra trabajados por Long and Ervin (2000) con $n = \{25; 50; 100; 250; 500; 100\}$.

Para cada una de las combinaciones posibles con los parámetros anteriores, se estima el modelo de regresión lineal y se corrige la matriz de covarianzas con cada uno de los estimadores HCCM mostrados.

Tamaño y poder de las pruebas de hipótesis: Para evaluar el tamaño de las pruebas de hipótesis, se calculó el porcentaje de las 1000 repeticiones en que se rechazó la hipótesis nula $H_0 : \hat{\beta} = \beta$, donde β es el parámetro poblacional que acompaña la variable x y que se definió como 1 en la ecuación (9). Por otro lado, para el poder de las pruebas de hipótesis, se calculó el porcentaje de las 1000 repeticiones en que se rechazó la hipótesis nula $H_0 : \hat{\beta} = 0$. Tanto el tamaño como el poder de las pruebas hipótesis, fueron analizados con un nivel de confianza igual al 95 %.

En síntesis las simulaciones se realizaron para 288 diferentes modelos, con 6 diferentes valores de α, 6 tamaños de muestra, 4 tipos de matriz de covarianza y 2 tipos de distribución de las variables explicativas. Por último, para cada uno de los modelos se calculó el poder y el tamaño de las pruebas de hipótesis planteadas.

3.1. Errores homocedasticos

En primer lugar se considerada analizar los estimadores HC junto con el estimador de mínimos cuadrado ordinarios, cuando no existe presencia de heterocedasticidad, es decir, cuando $\alpha = 0$. La figura 1 muestra el tamaño de la prueba de hipótesis, donde se quiere rechazar $H_0 : \hat{\beta} = \beta$, para los dos tipos de distribución de x_i analizados y sin presencia de heterocedasticidad. Cuando la variable x_i sigue una distribución uniforme, es posible observar que, tanto el estimador por OLS como los estimadores HC, se comportan de manera similar, solo el estimador HC0 tiende a rechazar la hipótesis nula más del 5 %, cuando se presentan muestras pequeñas. Por otro lado, al analizar el comportamiento cuando la variable x_i sigue una distribución normal, es posible observar que para muestras pequeñas los estimadores HC0, HC1 y HC2, tienden a rechazar la hipótesis nula más del 5 % de la veces. Lo anterior nos indica, que una corrección innecesaria del modelo nos puede llevar a conclusiones erradas sobre el valor de coeficiente estimado.

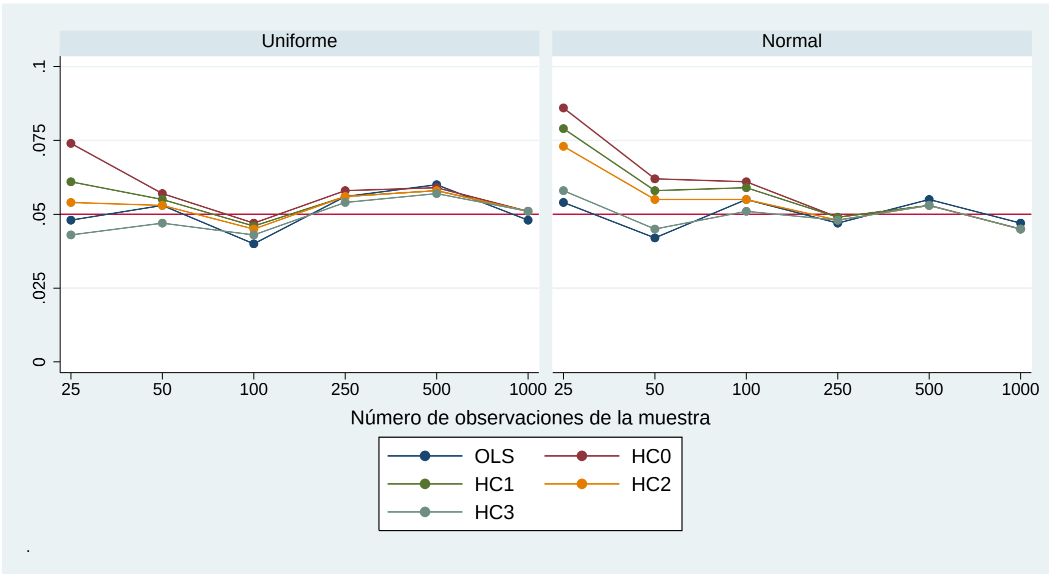


Figura 1: Tamaño de la pruebas con errores homocedasticos, por distribución de x_i

En cuanto al poder de la prueba de hipótesis para modelos homocedasticos, cuando se quiere rechazar la hipótesis nula de que $\hat{\beta}$ es diferente a cero, es posible observar (Véase Anexo C y D, cuando $\alpha = 0$) que no importa si se utiliza algún estimador HC, el 100 % de las veces se rechaza la hipótesis nula a un nivel de confianza del 95 %.

En conclusión, el mayor problema se evidencia con el estimador HCO para muestras pequeñas, aunque los estimadores HC1 y HC2 no fueron bien comportados para muestras pequeñas cuando la distribución de la variable independiente es normal. Por otro lado, el estimador HC3, mostró un comportamiento muy similar al estimador por OLS, siendo los unicos que arrojaron resultados bien comportados para los dos tipos de distribución de x_i.

3.2. Errores heterocedasticos

Cuando se presentan problemas de heterocedasticidad en el modelo, los estimadores brindados por el modelo de mínimos cuadrados ordinarios, pueden llevar a conclusiones erradas, (Véase anexos A y B). Al analizar el tamaño de las pruebas mostradas en la figura 2 con x_i distribuidos uniformemente, es posible deducir que los estimadores HC, corrigen casi de manera completa el problema de realizar inferencia estadística por la presencia de heterocedasticidad. De manera general, los mejores estimadores son HC2 y HC3, aunque cuando aumenta el grado de heterocedastidad dado por α, se evidencia un mejor comportamiento del estimador HC2 con respecto al HC3.

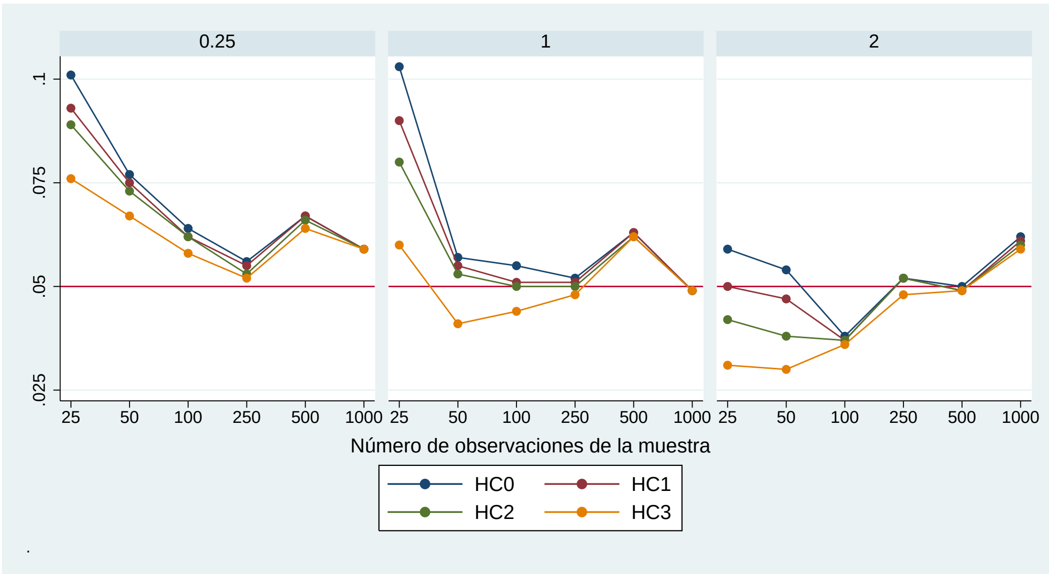


Figura 2: Tamaño de la pruebas con x_i uniformes, para valores de $\alpha = \{0{,}25; 1; 2\}$

De igual forma, el tamaño de las pruebas mostradas en la figura 3 con distribución normal para x_i, arroja que a medida que aumenta el grado de heterocedasticidad dado por α, las pruebas de hipótesis basadas en el estimador HC3 tienden a no rechazarse por encima del nivel de confianza del 95 %. En muestras pequeñas, no se evidencia un estimador que sobresalga, pero de manera general los estimadores HC2 y HC3 son los mejores comportados. Por otro lado, el análisis del poder de la prueba de hipótesis nula $Ho : \hat{\beta} = 0$, muestra que los porcentajes de rechazo del estimador HC3 son menores que HC2, en otras palabras HC3 tiene más probabilidades de cometer error tipo II.

Al comparar el tamaño de las pruebas realizadas con los estimadores HCCM y las realizadas con OLS (Véase anexos A y B), se encuentra que a medida que aumenta el grado de heterocedasticidad, las pruebas de hipótesis realizadas con el estimador de OLS pierden desempeño y se alejan progresivamente de los resultados arrojados por los estimadores HCCM.

En síntesis, para muestras pequeñas las pruebas de hipótesis basadas en los estimadores HC2 y HC3 son mejores que las basadas en los estimadores HC0 y HC1, lo cual es congruente

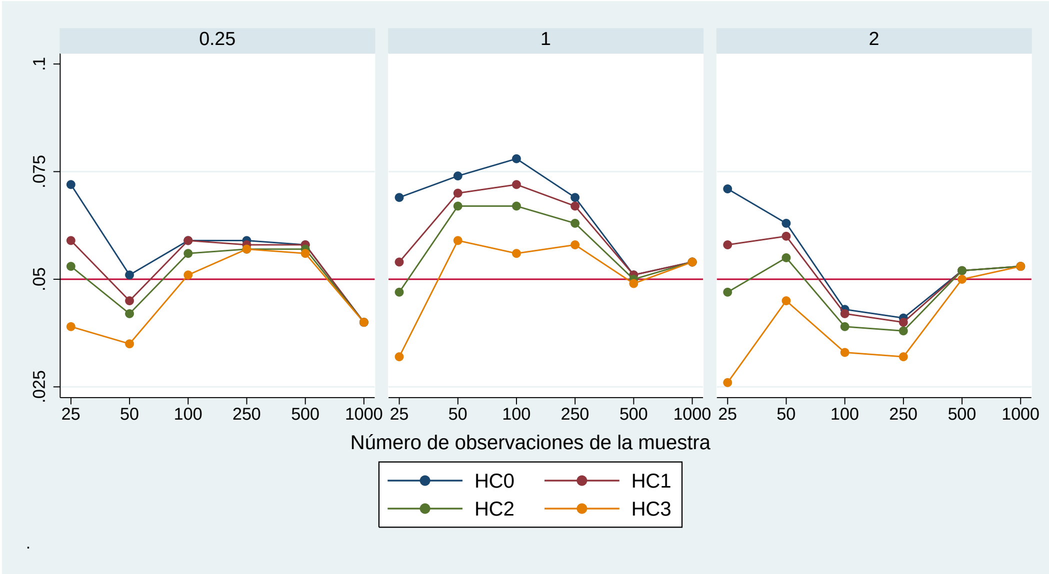


Figura 3: Tamaño de la pruebas con x_i normales, para valores de $\alpha = \{0{,}25; 1; 2\}$

con lo encontrado por Long and Ervin (2000). Por otro lado, el aumento en el grado de heterocedasticidad del modelo, influye de manera negativa en el estimador HC3, ya que su factor inflacionario de la varianza, tiende a sobrevalorar esta y conlleva a que la prueba de hipótesis nula no se rechace cuando debe, cometiendo de esta forma un error de tipo II. Por último, el uso de los estimadores HCCM (especialmente HC2 y HC3) se hace necesario cuando se encuentra la presencia de heterocedasticidad del modelo, ya que de manera general estos son una mejor alternativa que el estimador de OLS.

4. Conclusiones

Este trabajo estudió el comportamiento de los estimadores HCCM con diferente tipos de muestra y grados de heterocedasticidad, en un modelo de regresión lineal. Los resultados encontrado en la sección anterior nos llevan a concluir lo siguiente:

- Si se tiene indicio de presencia de heterocedasticidad, los estimadores HCCM brindan un mejor análisis estadístico que el estimador de OLS
- Para muestras pequeñas los mejores estimadores son HC2 y HC3.
- Al aumentar el grado de heterocedasticidad, el factor inflacionario del estimador HC3 se hace más elevado, ocasionando que el porcentaje de rechazos de la hipótesis nula sea menor.

Por último, este trabajo sienta bases solidas para evaluar en trabajos posteriores, el desempeño de los estimadores HC2 y HC3 en presencia de heterocedasticidad multiplicativa, cuando esta es detectada mediante pruebas de heterocedasticidad convencionales como la prueba de White (1980) o la prueba de Breusch and Pagan (1979).

Referencias

Boscardin, W. J. and Gelman, A. (1996). Bayesian computation for parametric models of heteroscedasticity in the linear model. *Advances in Econometrics*, 11(A).

Breusch, T. S. and Pagan, A. R. (1979). A simple test for heteroscedasticity and random coefficient variation. *Econometrica*, 47(5):1287–1294.

Davidson, R. and MacKinnon, J. G. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford University Press.

Godfrey, L. G. (1978). Testing for multiplicative heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 8(2):227 – 236.

Greene, W. H. (2011). *Econometric analysis*. Prentice Hall, 7 edition.

Harvey, A. C. (1976). Estimating regression models with multiplicative heteroscedasticity. *Econometrica*, 44(3):461–465.

Horn, S. D., Horn, R. A., and Duncan, D. (1975). Estimating heteroscedastic variances in linear model. *Journal of the American Statistical Association*, 70:380–385.

Long, J. S. and Ervin, L. H. (2000). Using heteroscedasticity consistent standard errors in the linear regression model. *The American Statistician*, 54:217–224.

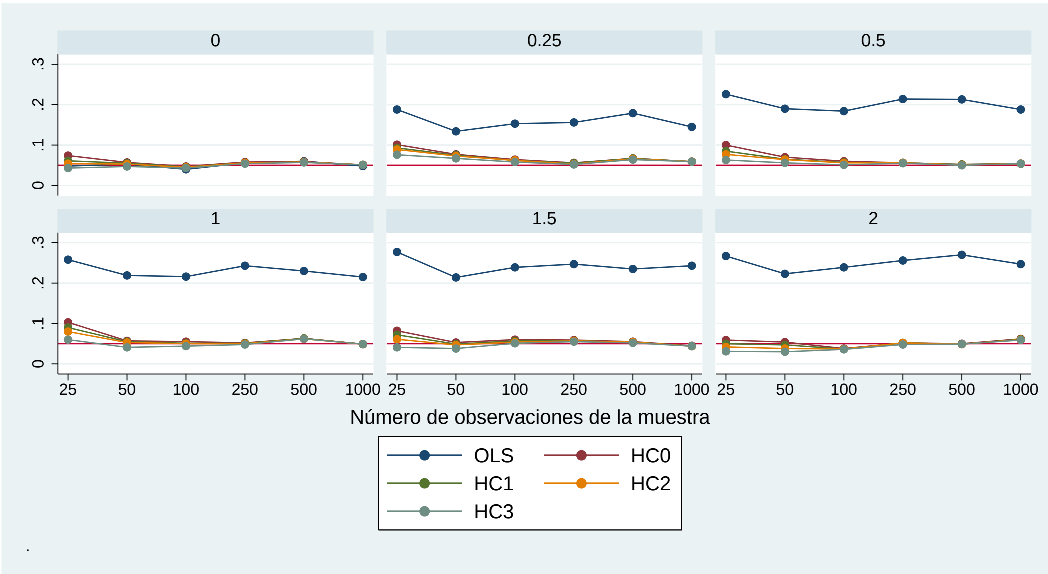
MacKinnon, J. G. and White, H. (1985). Some heteroskedasticity consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. *Journal of Econometrics*, 29:53–57.

Tanizaki, H. and Zhang, X. (2001). Posterior analysis of the multiplicative heterescedasticity model. *Communications in Statistics*, 30(5):855–874.

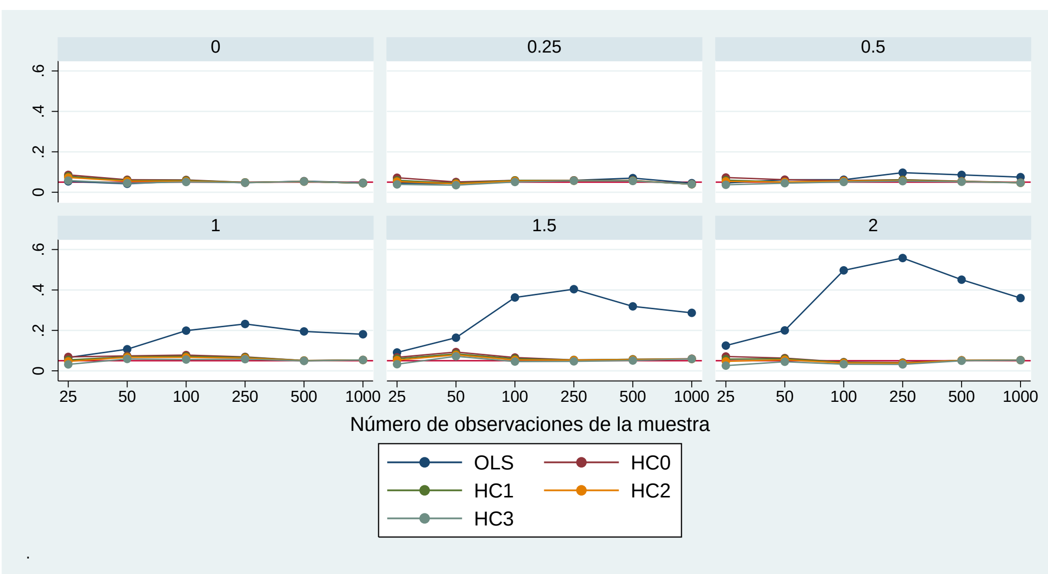
White, H. (1980). A heteroskedasticitic-consistent covariance matrix estimator and a direct test of heteroskedasticity. *Econometrica*, 48:817–838.

Anexos

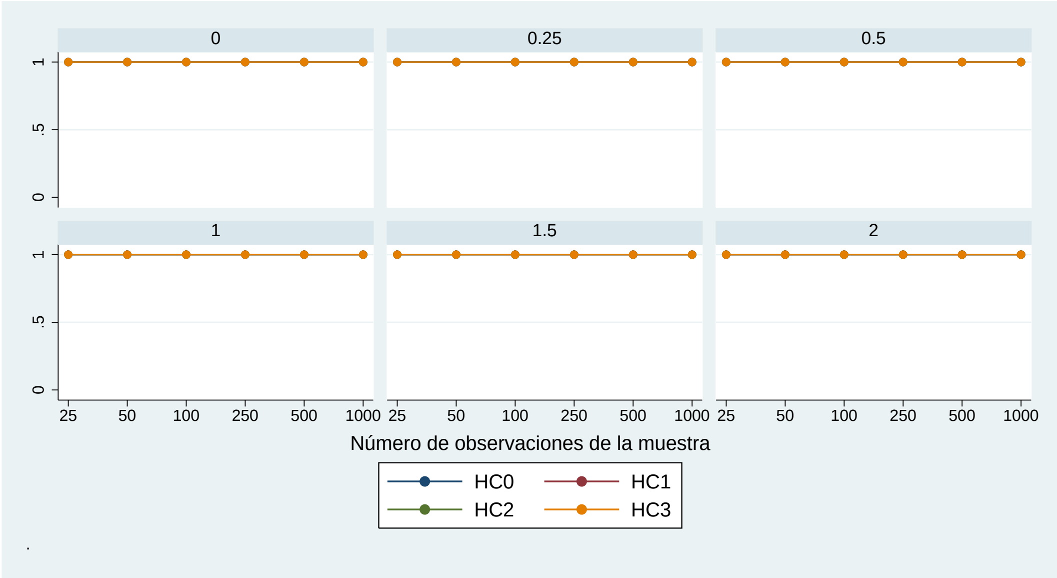
A. Tamaño de las pruebas para los valores de α, con distribución uniforme de x_i



B. Tamaño de las pruebas para los valores de α, con distribución normal de x_i



C. Poder de las pruebas para los valores de α, con distribución uniforme de x_i



D. Poder de las pruebas para los valores de α, con distribución normal de x_i