OPTIMIZACIÓN DINÁMICA Y MODELOS DE CRECIMIENTO CON CONSUMO ÓPTIMO: RAMSEY-CASS-KOOPMANS

Blanca Zuluaga
Leonardo Raffo

No. 17

Noviembre 2008

APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

No. 11, Noviembre de 2008

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición

Ana Isabel Gallego Londoño

Gestión Editorial

Departamento de Economía - Universidad ICESI

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 398. Fax: 5551441

Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

OPTIMIZACIÓN DINÁMICA Y MODELOS DE CRECIMIENTO CON CONSUMO ÓPTIMO: RAMSEY-CASS-KOOPMANS

Leonardo Raffo[1]
Blanca Zuluaga[2]

Resumen

En estas notas de clase se presenta y analiza el llamado modelo de crecimiento óptimo Ramsey-Cass-Koopmans. Este fue el primer modelo de crecimiento económico en el que el patrón de ahorro y, por ende, el de consumo, no están dados a priori, sino que son endógenos y responden a las preferencias y restricciones presupuestarias en el tiempo de las familias consumidoras. Por lo tanto este modelo es una versión sofisticada y mejor microfundamentada del modelo neoclásico de crecimiento de Robert Solow. El documento está dirigido a estudiantes de Macroeconomía tanto en pregrado como en Maestría.

Palabras claves: Crecimiento económico, Consumo óptimo, Modelo de Ramsey.

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

[1] Profesor tiempo parcial Universidad Icesi.
[2] Profesora tiempo completo Universidad Icesi. bzuluaga@icesi.edu.co

Contenido

1. Introducción

Las bases analíticas del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans fueron construidas por F. P. Ramsey en 1928 y se refinaron décadas después por Cass (1965) y Koopmans (1965). Se trata del primer modelo de crecimiento económico en el que el patrón de ahorro y, por ende, el de consumo, no están dados *a priori*, sino que son endógenos y responden a las preferencias y restricciones presupuestarias en el tiempo de las familias consumidoras. Por lo tanto este modelo es una versión sofisticada y mejor microfundamentada del modelo neoclásico de crecimiento de Robert Solow. En ese sentido, logra explicar de forma consistente y simplificada el proceso de crecimiento en economías con rendimientos constantes a escala y productividades marginales decrecientes en el capital, en las que se supone que tanto las firmas como las familias actúan de forma racional.

Es por esto que el trabajo de Ramsey, un matemático que falleció a los 26 años, constituye uno de los aportes más significativos a la teoría económica durante el siglo XX: Su aporte fue tan avanzado para su época, que sólo pudo ser comprendido y asimilado por la comunidad científica casi 40 años después.

2. El modelo

2.1. Supuestos

Se supone que los agentes económicos –las familias y las firmas– son racionales. Las familias son altruistas y resuelven su problema de elección teniendo en cuenta a toda su futura descendencia. De ahí que éstas pueden concebirse como la representación de toda una dinastía. La función de utilidad intertemporal de la familia representativa es:

$$U_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho \cdot t} u(c(t))\, L(t)\, dt\ , \quad (1)$$

[3]

[3] El subíndice 0 en la utilidad intertemporal aclara que la utilidad se mide desde el periodo inicial t=0.

En donde ρ representa una tasa subjetiva de descuento que actúa exponencialmente en el tiempo -la variable tiempo se expresa como una variable continua que va desde cero hasta infinito-. $u(c(t))$ es la función de utilidad instantánea de la familia representativa, que muestra el nivel de utilidad o felicidad que puede obtener una familia en un instante del tiempo en función del consumo per cápita, $c(t)$.

Como las familias tienden a ser aversas al riesgo – prefieren suavizar su consumo –, $u(\cdot)$ se supone cóncava, de modo que $u'(\cdot) > 0$, y $u''(\cdot) < 0$. El factor $L(t)$ representa el tamaño de la familia que, como es lógico, tiende a crecer en el tiempo. De hecho, conviene suponer que este crece a una tasa constante *n,* de manera que

$$L(t) = L_0 e^{n \cdot t}$$

Si se supone que $L_0 = 1$, se tiene que

$$L(t) = e^{nt} \tag{2}$$

Así tiene sentido suponer que “al comienzo de los tiempos” sólo hay un individuo por familia, que representa al cabeza de familia. La fuerza de trabajo es igual a la población y es inelástica ante cambios en el salario.[4]

La restricción de flujo relevante para cada familia viene dada por el crecimiento de su stock de riqueza $b(t)$. en el tiempo. La riqueza crece dependiendo de qué tan grande es la diferencia entre sus ingresos y su consumo. Sus ingresos tienen dos partes: el salario que devenga el cabeza de familia vendiendo su fuerza de trabajo en el mercado laboral, *w;* y los ingresos por intereses que le gana a su stock de riqueza $r \cdot b(t)$. Así, se tiene

[4] Este supuesto es conveniente puesto que justifica la no inclusión del ocio en la función de utilidad, lo cual facilita el análisis.

$$\dot{b}(t) = w + rb(t) - c(t) - nb(t) \tag{3}$$

Aquí el salario y la tasa de interés se suponen constantes, ya que hay competencia perfecta en todos los mercados y en cualquier momento del tiempo.

Por otra parte, se supone que la función de producción agregada de la economía viene dada por

$$Y = F(K, L), \tag{4}$$

la cual es una función neoclásica con las mismas propiedades de la del modelo de Solow, ya sea la versión con progreso técnico o la versión sencilla. Por sencillez, en lo que sigue se trabajará con una función sin progreso técnico. Al igual que en el modelo de Solow, se supone que hay un solo bien en la economía, $Y,$ el cual puede consumirse o invertirse. La acumulación de capital viene dada, como es usual por:

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t), \tag{5}$$

en donde, como es costumbre, δ representa la tasa de depreciación del capital agregado.

Y como: $I(t) = F(K(t), L(t)) - C(t),$ en donde *C(t)* representa el consumo agregado, se tiene

$$\dot{K}(t) = F(K(t), L(t)) - C(t) - \delta K(t), \tag{6}$$

Expresando la ecuación (6) en términos per cápita o por trabajador,

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = f(k(t)) - c(t) - \delta k(t), \tag{7}$$

en donde $f(\cdot)$ representa la función de producción intensiva, en función del capital por trabajador.

Dado que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) \equiv \dot{k}(t) = \frac{\dot{K}(t)L(t) - K(t)\dot{L}(t)}{L(t)^2} = \dot{K}(t)/L(t) - nk(t), \tag{8}$$

Entonces (7) queda

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t) \tag{9}$$

Finalmente conviene agregar que se supone que no hay externalidades ni otras fallas de mercado, los mercados funcionan perfectamente bien y existe competencia perfecta. Esto tiene una implicación sumamente importante: implica que *el equilibrio competitivo es equivalente al comando óptimo*, el cual corresponde a la solución del problema de planificación que resolvería un planificador social o dictador social benevolente con información completa y perfecta de la economía como un todo.

2.2. Solución

Como el problema que resuelve un planificador central es más sencillo en tanto que obvia el proceso de acumulación de riqueza por parte de las familias y la manera como este se soporta con la acumulación de capital, se procede a resolver éste primero.

Comando Óptimo

Teniendo en cuenta (3) el problema que resuelve un planificador central es:

$$\left.\begin{aligned} &\max\ U_0 = \int_0^\infty e^{(n-\rho)\cdot t} u(c(t))\,dt \\ &\text{s.a}\quad \dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta)k(t), \\ &\text{y}\qquad k(0) = k(0) > 0 \text{ está dado.} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$ [5]

Es una práctica común suponer que la función de utilidad instantánea es del tipo

$$u(c(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta}; \theta > 0 \tag{11}$$

A esa función de utilidad instantánea se le llama función *CIES*[6] (Constant Intertemporal Elasticity Substitution Function), y se caracteriza porque su elasticidad de sustitución intertemporal (σ) es constante y viene dada por $1/\theta$. Esta elasticidad muestra cómo cambian las proporciones del consumo de un periodo con respecto al de otro periodo posterior (en términos porcentuales) cuando se presenta un cambio infinitesimal en la tasa marginal de sustitución intertemporal (en términos porcentuales). Esto es,

$$\sigma = -\frac{d[c(t_1)/c(t_2)]}{d[u'(c(t_1)/u'(c(t_2))]} \cdot \frac{u'(c(t_1)/u'(c(t_2))}{c(t_1)/c(t_2)},$$

en donde $u'(c(t_1)/u'(c(t_2))$ es la magnitud de la pendiente de una curva de indiferencia intertemporal, o sea la tasa marginal de sustitución intertemporal. Cuando t_2 se aproxima a t_1 puede probarse que la expresión anterior se aproxima a $-u'(c)/(c \cdot u''(c))$, de modo que

[5] Aquí se ha reemplazado *L(t) = e^nt^* en la función de utilidad, ecuación (2.1).
[6] También se conoce como función *CRRA (Constant Risk Relative Aversion function)*, ya que el recíproco de elasticidad de sustitución intertemporal corresponde al coeficiente de aversión al riesgo en el consumo, el cual mide la curvatura de la función de utilidad instantánea –como se explica en la siguientes líneas del texto.

$$\sigma = -u'(c)/(c \cdot u''(c)). \qquad (12)^7$$

Esta ecuación muestra que, efectivamente, σ corresponde al recíproco de la elasticidad de la utilidad marginal con respecto al consumo (θ), la cual a su vez es una medida de la curvatura de la función de utilidad instantánea y, por ende, de la aversión al riesgo en el consumo y el deseo de los individuos de suavizar su consumo. En consecuencia, bajos (altos) valores de la elasticidad de sustitución intertemporal se relacionan con altos (bajos) niveles de aversión al riesgo. O equivalentemente, cuanto mayor sea θ, mayor es el deseo de alisar el consumo a través del tiempo.

En lo que sigue, para simplificar la notación se denotan todas las variables que dependen del tiempo con el subíndice *t*, pero debe tenerse presente que el tiempo se define como una variable continua.

Para que la utilidad sea acotada, debe cumplirse que

$$\lim_{t \to \infty} e^{-(\rho - n)t} \cdot \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} = 0 \qquad (13)$$

Puede probarse que esto se cumple siempre que $\rho > n$. De no cumplirse esta condición, la utilidad total (sumando todos los periodos en el tiempo) sería infinita, lo que en la realidad carece de sentido. Así que este es un requisito importante para que el modelo esté bien definido.

El Hamiltoniano relevante para resolver el comando óptimo del modelo es:

$$H(c_t, k_t, \lambda_t) = e^{-(\rho - n)t} \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1 - \theta} + \lambda_t (f(k_t) - c_t - (n + \delta) k_t) \qquad (14)$$

---

[7] Para el caso de (11), $u'(c) = c^{-\theta}$ y $u''(c) = -\theta c^{-\theta - 1}$. Entonces $\sigma = \dfrac{1}{\theta}$

en donde, λ_t representa el precio sombra del capital en el periodo *t*.

Las condiciones de primer orden son:

(1) $$H_c = 0 = e^{-(\rho-n)\cdot t} c_t^{-\theta} - \lambda_t; \tag{15}$$

Esta condición garantiza que el consumo se maximiza *ceteris paribus* para cada periodo en el tiempo. Y

(2) $$H_k = -\dot{\lambda}_t = \lambda_t(f'(k_t) - (n+\delta)); \tag{16}$$

Condición que garantiza que el stock de capital se acumula eficientemente, al ser el producto marginal *neto* del capital[8] igual al negativo de la variación en el precio sombra del capital (que es negativa) para cada periodo en el tiempo.

Adicionalmente, debe cumplirse la condición de transversalidad, que garantiza que al final de los tiempos no se deja capital o que éste no vale nada en ese momento.

(3) $$\underset{t\to\infty}{lím}\ \lambda_t k_t = 0 \tag{17}$$

Dinamizando (15), esto es, tomando logaritmos y derivando con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned} &-(\rho-n) - \theta\log(c_t) = \log(\lambda_t) \\ &\rho - n + \theta\frac{\dot{c}_t}{c_t} = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \end{aligned} \tag{18}$$

[8] O sea el producto marginal del capital descontándole la tasa de depreciación y el crecimiento poblacional.

Despejando $-\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t}$ de (2,16) y sustituyendo en (18) se llega a

$$\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left(\frac{f'(k_t) - \delta - \rho}{\theta} \right) \tag{19}$$

La ecuación (19) se denomina ecuación de Euler o regla de Keynes-Ramsey, y es clave porque expresa el resultado fundamental del algoritmo de optimización dinámica: en el óptimo la tasa de crecimiento del capital por trabajador depende de cómo es el producto marginal del capital neto por trabajador con respecto a la tasa de descuento subjetiva de las familias y a la elasticidad de sustitución intertemporal. Nótese que

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} \overset{\geq}{<} 0 \Leftrightarrow f'(k_t) \overset{\geq}{<} (\delta + \rho).$$

Esta también puede expresarse así:

$$\underbrace{\rho + \theta \frac{\dot{c}_t}{c_t}}_{\textbf{Beneficio o rendimiento del consumo}} = \underbrace{f'(k_t) - \delta}_{\textbf{Rendimiento neto del K.}} \tag{19'}$$

Esta nueva forma de expresar (19) establece que ***en el óptimo, el rendimiento asociado al consumo en un periodo t debe igualarse al rendimiento neto del capital en ese mismo periodo***. Aquí ρ puede interpretarse como el aumento de utilidad obtenida por consumir en el presente, mientras que θ capta el hecho de que la familia consumidora desea "suavizar" o "alisar" el consumo a través del tiempo, dado que es aversa al riesgo. Cuanto mayor es θ, mayor es el deseo de suavizar el consumo en el tiempo, y en consecuencia, menor es la tasa de crecimiento del consumo (ver (19)). Así mismo, cuanto mayor es ρ menor es la tasa de crecimiento en el consumo y viceversa.

La acumulación de capital viene dada por la restricción presupuestaria intertemporal. Así, la solución del modelo viene dada por el análisis de un sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales, que, en principio, no puede resolverse de forma explícita, pero cuya solución puede examinarse utilizando diagramas de fases para determinar sus propiedades dinámicas. Éstas son (10) y (19)

$$\dot{k}(t) = f(k_t) - c_t - (n+\delta)k_t,$$

y

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \left(\frac{f'(k_t) - \delta - \rho}{\theta}\right),$$

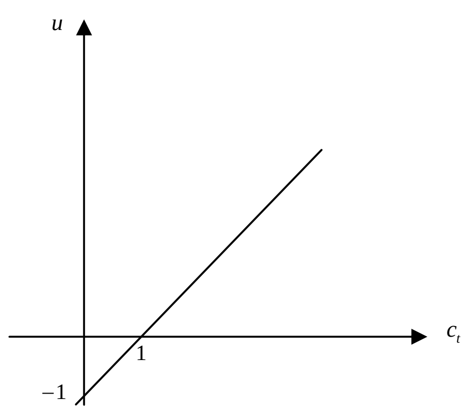
teniendo en cuenta que se cumple la condición de transversalidad (17).

Dos casos especiales:

a) Nótese que si θ tiende a cero, la función de utilidad instantánea $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta}$ se aproxima a una línea recta:

$$u(c_t) = c_t - 1;$$

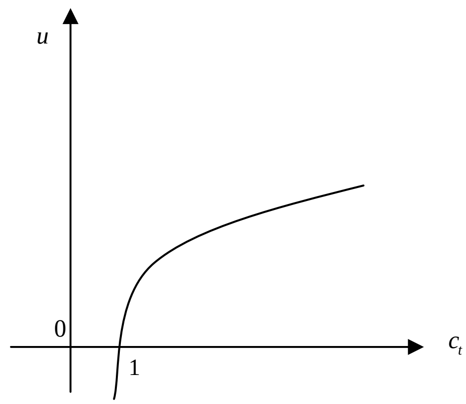
En este caso la elasticidad de sustitución intertemporal se aproxima a infinito. La función de utilidad es lineal, entonces los individuos no desean alisar el consumo.



b) En cambio si θ tiende a 1, puede probarse matemáticamente que la función CIES tiende a una función logarítmica de tipo

$$u(c_t) = \ln(c_t)$$

Gráficamente,



En este caso la elasticidad de sustitución intertemporal es 1, de modo que σ no tiene ningún impacto sobre la tasa de crecimiento en el consumo. De (19) la tasa de crecimiento en el consumo (con θ=1) corresponde a $\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = f'(k_t) - \delta - \rho,$ la cual es positiva si $\gamma_c = \frac{\dot{c}_t}{c_t} = f'(k_t) > (\delta + \rho).$

2.3. Análisis del Estado Estacionario

En el estado estacionario las variables en unidades por trabajador crecen a la misma tasa, en este caso 0;

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = 0 \qquad (20)$$

Se trata de una situación de equilibrio de largo plazo al cual la economía bajo los supuestos del modelo puede converger si –como se verá más adelante– se parte de unos niveles iniciales del consumo por trabajador y del capital por trabajador que no son, ni muy altos ni muy bajos.

Con este resultado las ecuaciones (9) y (19) quedan así

$$0 = f(k_t^*) - c_t^* - (n+\delta)k_t^* \Leftrightarrow f(k_t^*) = c_t^* + (n+\delta)k_t^* \tag{21}$$

y

$$0 = \frac{(f^{'}(k_t^*) - \rho - \delta)}{\theta} \Leftrightarrow f'(k_t^*) = \rho + \delta \tag{22}$$

De modo que en el estado estacionario se debe tener $\dot{c}_t = 0$ y al mismo tiempo $\dot{k}_t = 0$.

Por ejemplo, con una función de producción de tipo Cobb-Douglas del tipo $y_t = Ak_t^{\beta}$ con $0 < \beta < 1,$ de (21) se obtiene el nivel de capital por trabajador de estado estacionario.

$$\beta A k_t^{*\beta-1} = \rho + \delta \Leftrightarrow k_t^* = \left(\frac{\rho+\delta}{A\beta}\right)^{-\frac{1}{(1-\beta)}} \Leftrightarrow k_t^* = \left(\frac{\beta A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$$

Sustituyendo este resultado en (21) puede obtenerse el nivel de consumo por trabajador de estado estacionario:

$$c_t^* = A\left(\frac{\beta A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{\beta}{(1-\beta)}} - (n+\delta)\cdot\left(\frac{\beta A}{\rho+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$$

Puede observarse que el nivel de capital por trabajador de estado estacionario es inferior al nivel de capital por trabajador que corresponde al nivel de regla de oro en el modelo

Solow-Swan, $k_g^* = \left(\frac{\beta A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$.[9] De ahí que la tasa de ahorro asociada al estado estacionario en este modelo es menor que la que corresponde a la regla de oro en el modelo Solow-Swan, por lo que el nivel de consumo por trabajador es inferior al que corresponde a la regla de oro en el modelo Solow-Swan. Esto se debe a que los consumidores en este modelo poseen una tasa de descuento subjetiva, ρ, la cual refleja el nivel de impaciencia de éstos y conlleva a que el nivel de capital de estado estacionario sea relativamente menor al de regla de oro, debido a que los agentes tienen incentivos para consumir una cantidad de bienes relativamente mayor en el presente. Así, puede verse que entre más fuerte (débil) sea el nivel de impaciencia de los agentes, mayor (menor) es ρ, y, en consecuencia, menor (mayor) es el nivel de capital por trabajador correspondiente al estado estacionario.

2.4. Dinámica de Transición

La dinámica de cambio, ya sea de divergencia o de convergencia hacia el estado estacionario, puede analizarse a través de un diagrama de fases a partir de las dos ecuaciones dinámicas del modelo (9) y (19).

$$\dot{k}_t = f(k_t) - c_t - (\delta + n)k_t \tag{9}$$

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(f^{'}(k_t) - \rho - \delta)}{\theta} \tag{19}$$

Cumpliendo la condición de transversalidad (17) $\lim_{t\to\infty} k_t \lambda_t = 0$

9 Esto es cierto dado que ρ>n

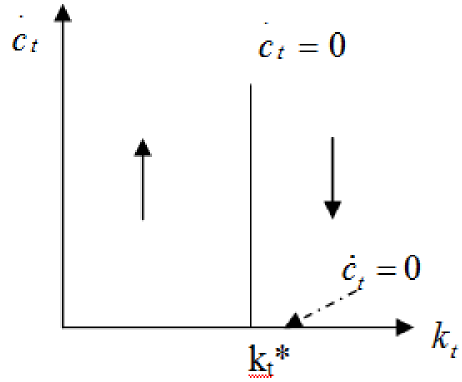
El diagrama de fases grafica el comportamiento de k_t contra el de c_t. Para ello conviene trazar las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ en función de k_t. Considérese primero $\dot{c}_t = 0$; De (9) obtenemos,

$$\frac{(f'(k) - \rho - \delta)c}{\theta} = 0$$

Esta expresión es igual a cero si *a)* c=0, que corresponde al eje horizontal en el plano cartesiano, o *b)* $\frac{(f'(k) - \rho - \delta)}{\theta} = 0$; en este caso puede observarse que $\dot{c}_t = 0$ no depende de c_t, de modo que se trata de una línea vertical que pasa por el punto en que $k_t = k_t^*$. Específicamente, en k_t^* se cumple que $f'(k^*) = \rho + \delta$. El gráfico 1 indica lo descrito.

¿Cómo es la dinámica del consumo asociada a la ecuación (19)? se tiene que si $k_t > k_t^*$ el nivel de consumo estaría disminuyendo, puesto que *f'(k)* es una función decreciente de *k*. En cambio, si $k_t < k_t^*$ el nivel de consumo estaría creciendo. Esto lo ilustran las flechas en el gráfico 1.

Gráfico 1. Diagrama de fase (1)

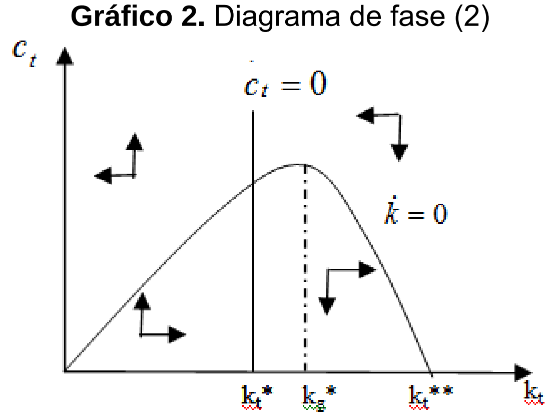


Considérese ahora $\dot{k}_t = 0$. De (9) obtenemos

$$c = f(k) - (\delta + n)k$$

Si k=0 $\rightarrow$ c=0. A medida que k aumenta, el consumo aumenta hasta alcanzar un máximo cuando $f'(k^*) = n + \delta$. Recuérdese que ésta es la condición correspondiente al capital de la regla de oro. Comparemos k^*_t con k^*_g. Suponga una función Cobb-Douglas $y_t = Ak_t^{\beta}$. Como se calculó antes, $k_t^* = \left(\frac{\beta A}{\rho + \delta}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$ y $k_g^* = \left(\frac{\beta A}{n + \delta}\right)^{\frac{1}{(1-\beta)}}$. Dado que ρ>n, sabemos que $k^*_t < k^*_g$. Entonces, la curva $\dot{k} = 0$ se puede graficar así:

Gráfico 2. Diagrama de fase (2)



Sabemos que en k_t^{**} la curva vuelve a cruzar el eje horizontal porque corresponde a un nivel tan alto del capital que toda la producción se destinaría a mantenerlo, no quedando nada disponible para el consumo.[10]

¿Cuál es la dinámica del capital asociada a la ecuación (9)? Vemos que si *c* aumenta, entonces k disminuye. Partiendo desde $\dot{k}_t = 0$, un movimiento hacia arriba de la curva

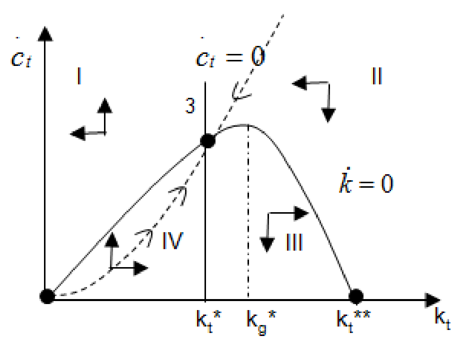
[10] En k_t^{**} se cumple que $f(k^{**}) = (\delta + n)k^{**}$, relación que se obtiene al reemplazar *c=0* en la ecuación (9)

(un aumento de *c*) hace que $\dot{k}_t < 0$; esto se refleja en el gráfico 2 con las flechas horizontales que apuntan a la izquierda. Igualmente, partiendo de $\dot{k}_t = 0$, un movimiento hacia abajo de la curva (una reducción en *c*) hace que $\dot{k}_t > 0$, representado con las flechas horizontales que apuntan a la derecha.

El diagrama está pues dividido en cuatro regiones (de I a IV), cada una con diferente dinámica conjunta del capital y el consumo representado en los cuatro grupos de flechas.

Ahora bien, en el gráfico 3 observamos que las curvas $\dot{c}_t = 0$ y $\dot{k}_t = 0$ se cruzan tres veces, es decir, hay tres estados estacionarios (los tres puntos negros): el origen, el punto k_t^{**} y el punto 3 (correspondiente a k_t^{*}).

Gráfico 3. Diagrama de fase (3)

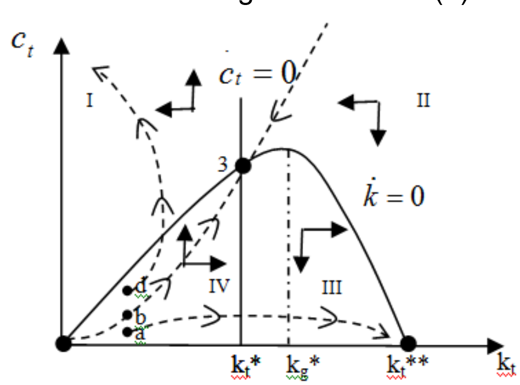


Si se observa la dirección de las flechas se puede concluir que el origen no es un equilibrio estable dado que, a menos que se empiece exactamente ahí, la dinámica alejaría la economía de ese punto. Por el contrario, k_t^{**} sí es un equilibrio estable, puesto que las flechas se dirigen hacia ese punto. En cuanto al estado estacionario representado por el punto 3, se puede llegar a éste desde dos de las cuatro regiones (II y IV). Esto implica una estabilidad denominada "punto de silla". El punto 3 es el único estado estacionario en el que el consumo es positivo y al que la economía convergerá en el largo plazo. La trayectoria estable mostrada por la curva punteada en el gráfico 3, es en la que SIEMPRE se encontrará la economía con horizonte infinito.

La razón por la cual los individuos escogen la trayectoria estable, es que ésta es la única que cumple las condiciones de primer orden (15), (16) y (17). Veremos que las trayectorias por encima de la trayectoria estable violan la condición de Euler (19), mientras que las trayectorias por debajo violan la condición de transversalidad.

Suponga un punto por fuera de la trayectoria estable como *d* en el gráfico 4. Como lo muestra la trayectoria que sale de este punto, inicialmente tanto el consumo como el capital crecen (región IV). Pero cuando la trayectoria cruza la curva $\dot{k}=0$, el capital empieza a decrecer mientas el consumo sigue subiendo (región I). Cuando se llega al nivel *k=0*, el consumo también debería ser nulo, puesto que sin capital no hay producción y sin producción no hay consumo. Es decir, se presenta un salto en el crecimiento de *c* a menos infinito. Ahora bien, dado que $\underset{k\to 0}{f'(k)}=\infty$, entonces, de acuerdo a (19) $\frac{\dot{c}}{c}\to\infty$. Pero en realidad, como acabamos de mencionar, el crecimiento ha saltado a menos infinito. Se concluye que la trayectoria descrita a partir del punto *d* viola la ecuación de Euler (19). Esta es una trayectoria explosiva a la que no tenderá la economía. Podemos excluir entonces las trayectorias por encima de la trayectoria estable.

Gráfico 4. Diagrama de fase (4)



Ahora considérese el punto *a*. Como lo describe la trayectoria que se desprende de este punto en el gráfico 4, inicialmente tanto el consumo como el capital se incrementan (región IV), pero una vez la trayectoria alcanza la región III, la economía tendería al estado estacionario k^{**}. Podemos observar que $k^{**} > k_g^*$ y, dado que $f'(k_g^{\ *}) = n + \delta$, entonces $f'(k^{**}) < n + \delta$. Considérese ahora la condición de primer orden de las empresas según la cual $r^{**} = f'(k^{**}) - \delta$ [11]. Esto implica que $r^{**} < n$. Pero veamos lo que se requiere para que la condición de transversalidad se cumpla. Reemplazando *r*** en la ecuación de primer orden (16),

$$-\dot{\lambda}_t = \lambda_t (r** - n)$$

Integramos,

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{-(r** - n)t}$$

Y substituimos en la ecuación de transversalidad (17)

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_0 e^{-(r** - n)t} k^{**}$$

Dado que $r^{**} < n$, la expresión anterior tiende a más infinito y no a cero como lo requiere la condición cuando *t*→∞. Podemos entonces excluir la posibilidad de que la economía escoja la trayectoria que sale del punto *a*, donde los consumidores consumen muy poco e invierten demasiado. Asimismo, cualquier trayectoria por debajo de la trayectoria estable puede ser excluida por la misma razón.

[11] Recuerde que esta condición proviene de maximizar los beneficios de las empresas con respecto a *k*, $\Pi = f(k) - (r + \delta)k - w$.

3. Ejercicios

1. Plantee el problema de la economía descentralizada en el modelo de Ramsey. Resuélvalo. De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿corresponde en éste caso el equilibrio competitivo al óptimo paretiano?

2. Maximice

$$V = \int -(x + \frac{u^2}{2})\, dt$$

s.a.

$$\dot{X} = u$$

$$\mathrm{X}(0) = 2$$

$$\mathrm{X}(1) = 1$$

Obtenga el valor de V

3. Una empresa desea maximizar su ganancia a tiempo presente sobre un periodo de planificación dado por un intervalo de tiempo [0,T]. La ganancia está presentada por la función

$$\Pi(t) = G - \frac{1}{2} aI(t)^2,$$

en donde G es un monto de ganancia fijo que se obtiene para cada periodo, a es un parámetro positivo, *k(t)* es el stock de capital en *t,* e *I(t)* la inversión.

La empresa debe determinar en cada instante la inversión que efectúa (la controla). Como es usual se supone que el capital se deprecia a una tasa δ constante, de modo que

$$I(t) = \dot{k}(t) + \delta K(t).$$

a) Plantee el problema de control óptimo que debe resolver esta firma, suponiendo que $k(0) = 0,\ \ k(T) \geq 0,$ y que la tasa de descuento subjetivo de las firmas es $\rho > 0.$

b) Plantee el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden relevantes.

c) Halle la tasa de crecimiento óptima de la inversión, así como su trayectoria. Grafíquela. ¿Qué se puede decir de ésta?

d) Obtenga la ecuación diferencial que resuelve la trayectoria óptima del capital y resuélvala utilizando como factor de integración $e^{-\rho t}$ y teniendo en cuenta que $k(0) = 0.$

4. Modelo de ciclo vital de gasto y ahorro.

Una familia tiene un capital X_0 ahorrado en el momento t=0 y no tiene renta. Desea establecer una pauta temporal de gasto con el fin de maximizar su utilidad en el intervalo de tiempo 0 a T. La utilidad corresponde a la raíz cuadrada de su nivel de consumo o gasto (C) con un factor de descuento temporal subjetivo ρ.

Su capital disponible (K) aumenta en forma continua proporcional al capital, con una tasa de interés *r*: $\dot{X} = rX - C$

$$X(0) = X_0$$
$$X(T) = X_T$$

a) Plantee el problema de maximización

b) Resuelva el Hamiltoniano y las condiciones de primer orden para obtener la ecuación que corresponde a la trayectoria óptima de consumo.

5. Solucione el siguiente problema de optimización de un rentista

$$Max\int_0^T e^{-\rho t}\log(c(t))dt$$

s.a.

$$\dot{a}(t) = ra(t) - c(t)$$
$$a(0) = a_0 > 0$$
$$a(T) = a_T$$

Aquí *a* representa los activos de una persona y *c*, como es usual, su nivel de consumo. ¿Cómo se pueden interpretar económicamente los resultados obtenidos?

6. Solucione el siguiente problema de optimización de un rentista:

$$Max\int_0^T e^{-\rho t}\log(c(t))dt$$

s.a.

$$\dot{a}(t) = ra(t) - c(t)$$
$$a(0) = a_0 > 0$$
$$a(T) = a_T$$

Aquí *a* representa los activos de una persona y *c*, como es usual, su nivel de consumo. ¿Cómo se pueden interpretar económicamente los resultados obtenidos?

7. Resuelva y pruebe que el control óptimo varía exponencialmente en el tiempo

$$MaxV = -\int_0^1 u^2 dt$$

s.a.

$$\dot{x}(t) = x + u$$
$$x(0) = 1$$
$$x(1) = 0$$

8. Suponga una función de utilidad logarítmica

$$\int_0^T \ln c \, e^{-\rho t}$$

El individuo maximiza su utilidad sujeto a las siguientes restricciones

$$\dot{k} = w + rk - c$$
$$k(0) = k(T) = 0$$

Resuelva el problema de maximización y obtenga la ecuación que representa la trayectoria de óptima de consumo.

4. Bibliografía

- Argandoña, A., Gámez, C. y Mochón F. (1999). Macroeconomía Avanzada I y II. McGraw-Hill.
- Dixit, A.. (1990). Optimization in Economic theory. Oxford : Oxford University Press. Segunda edición.
- Romer, D. (2002). MAcroeconomía Avanzada. McGraw-Hill. segunda edición, España.
- Sala-I-Martin, X. (1994). Apuntes de Crecimiento Económico. Antoni Bosch Editor. Segunda edición.