TUTORIAL PARA LA ESTIMACIÓN DE UN MODELO CON PRESENCIA DE HETEROCEDASTICIDAD EN EASYREG

Julio César Alonso C.

No. 15

Junio de 2008

APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

No. 15, Junio de 2008

Editor

Julio César Alonso C.

jcalonso@icesi.edu.co

Vanessa Ospina López

Asistente de Edición

Gestión Editorial

Departamento de Economía - Universidad Icesi

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 8398. Fax: 5551441

Calle 18 # 122-135 Cali, Valle del Cauca, Colombia

TUTORIAL PARA LA ESTIMACIÓN DE UN MODELO CON PRESENCIA DE HETEROCEDASTICIDAD EN EASYREG

Julio Cesar Alonso C[1].

Junio de 2008

Resumen

Este documento presenta una breve introducción a tres pruebas de heteroscedasticidad (Golfeld y Quandt, Breush-Pagan (1979) y White (1980)) empleando el paquete econométrico gratuito EasyReg. Así mismo se presenta la manera de estimar la Matriz de Varianzas y Covarianzas y t-calculados consistente de White. Finalmente, se discute como se pueden comprobar hipótesis que implican combinaciones lineales de los parámetros empleando la corrección de White (1980). Este documento está dirigido principalmente a estudiantes de pregrado de un curso de econometría o cualquier lector con conocimientos básicos del modelo de regresión múltiple.

Palabras Clave: EasyReg, Regresión múltiple, Prueba de Wald con corrección de White, estimación de matriz *de Varianzas y Covarianzas consistente de White, corrección por heteroscedasticidad*

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

[1] Profesor del Departamento de Economía y Director del Centro de Investigación en Economía y Finanzas (CIENFI) de la Universidad Icesi, jcalonso@icesi.edu.co.

Al terminar este tutorial usted estará en capacidad de:

- Analizar gráficamente los residuos de una regresión.
- Efectuar las pruebas de heterocedasticidad de Golfeld y Quandt, Breush-Pagan (1979) y White (1980).
- Obtener el estimador consistente de White para la matriz de varianzas y covarianzas y hacer inferencia sobre los coeficientes con los t-calculados corregidos por la presencia de heteroscedasticidad.
- Efectuar pruebas de Wald para restricciones lineales sobre los parámetros en presencia de heteroscedasticidad.

Para este tutorial emplearemos los datos del ejemplo 6.1 (página 131) de Pindyck y Rubinfeld (1991). Los datos pueden ser encontrados en la página Web de Apuntes de Economía. En este ejemplo consideraremos datos de corte transversal de un estudio del gasto anual de los hogares de cuatro diferentes grupos.
Para explicar el gasto de los hogares se propone el siguiente modelo:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i \qquad (1)$$

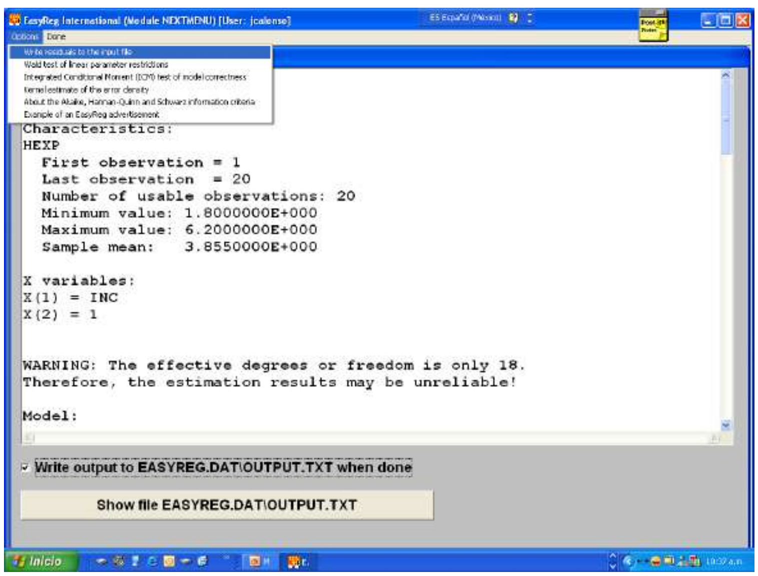
donde y_i (*HEXP*) es el gasto del hogar *i* y x_i (*INC*) corresponde al ingreso del hogar *i*, ambas variables medidas en miles de dólares

1 Análisis gráfico de los residuos

Una práctica común para detectar intuitivamente problemas de heteroscedasticidad en el término de error es emplear gráficas de dispersión de los errores estimados ($\hat{\varepsilon}$) y de las variables independientes, al igual que los errores estimados y el valor estimado de la variable dependiente ($\hat{y}$). Algunos autores también sugieren emplear gráficos de dispersión del cuadrado de los residuos ($\hat{\varepsilon}_i^2$) y las variables explicativas. Estos gráficos son empleados para determinar la existencia de algún patrón en la variabilidad del error.

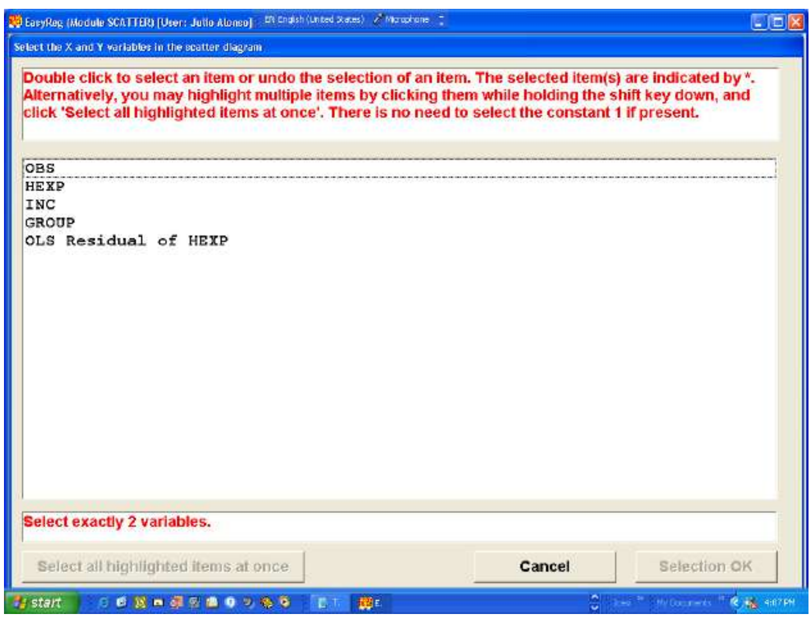
1.1 Gráficos de Dispersión de los Residuos Estimados, las Variables Independientes y la Variable Dependiente Estimada.

El primer paso será generar la serie de los residuos, para esto cargue los datos y corra la regresión correspondiente al modelo (1) empleando el método de mínimos cuadrados ordinarios (Para ver detalles de cómo hacer esto revise el tutorial 1). Haga clic en el menú “*Options*” y escoja la opción “*Write residuasl to the input file*” (primera opción), esto creará una nueva variable con el nombre “*OLS Residuals of HEXP*”. Ahora regrese a la ventana principal de EasyReg (Haga clic en la opción “*Done*” de la parte superior izquierda).



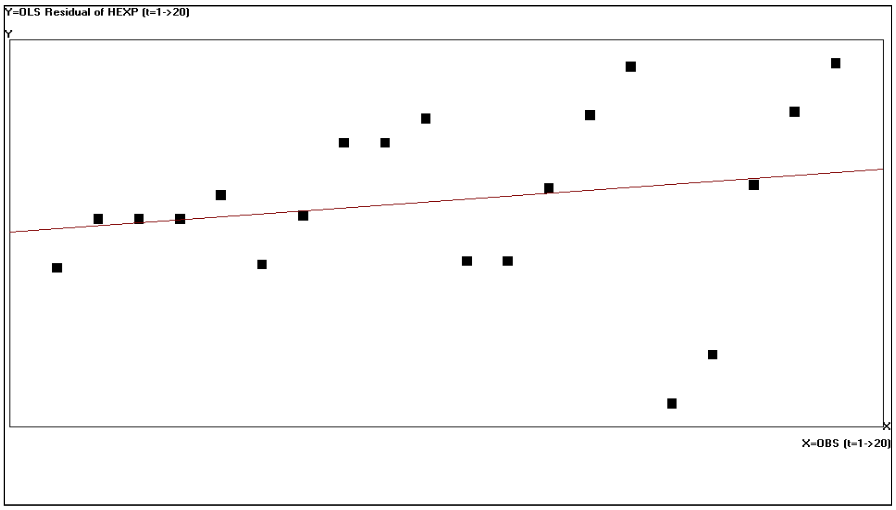
Ahora grafiquemos los residuos versus el número de observación (*i*). Para esto haga clic en “*Menu /Data analisys / Scatter diagram*”.

Verá la siguiente ventana:



Seleccione la variable "*OBS*" (haciendo doble clic sobre ella) y posteriormente seleccione la variable "*OLS Residuals of HEXP*". Note que la primera variable seleccionada será ubicada en el eje de las x´s y la segunda variable se ubicará en el eje de las y´s. La siguiente ventana le preguntará si desea graficar una submuestra de los datos, haga clic en "*No*" y después en "*Continue*". Observará el siguiente gráfico.

Gráfico 1. Errores Estimados versus el número de la Observación

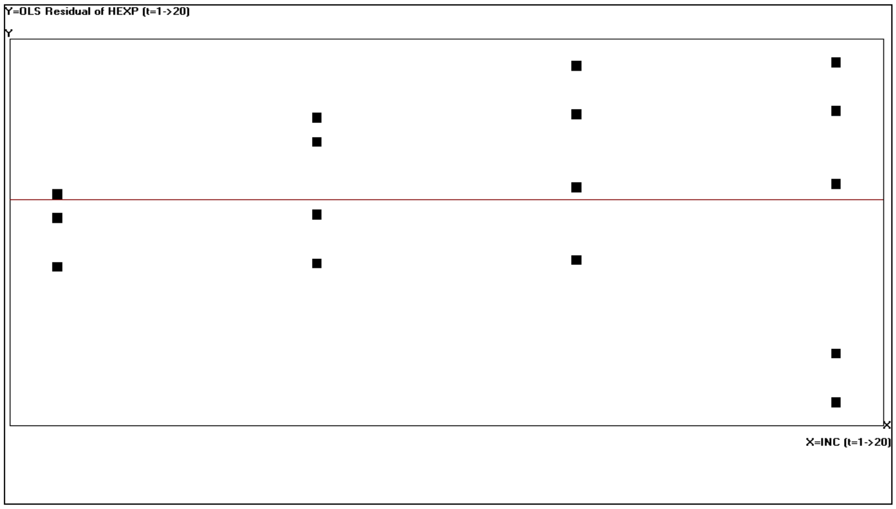


El gráfico muestra claramente que la variabilidad de los errores es diferente, en especial, la variabilidad de los errores correspondientes a los últimos datos muestrales (asociados a un ingreso alto) poseen una dispersión mayor que los primeros datos.

En todos los gráficos siempre existe una opción de grabar el gráfico dibujado por EasyReg si se hace clic en el botón "*Save Picture*". El dibujo queda grabado como un archivo .bmp en el fólder C:\Archivos de Programas\EasyReg International\TEMP\EASYREG.DAT o en su defecto en el fólder donde usted halla inicializado EasyReg. Los gráficos se pueden consultar rápidamente por el menú "*Menu/Output/View bitmap files*". Si usted está escribiendo un informe y desea pegar este gráfico en un archivo de Word, lo puede hacer fácilmente empleando el menú "*Insertar / Imagen de un archivo*" o simplemente seleccione el gráfico desde su carpeta de origen y arrástrelo al lugar del documento donde lo desea ubicar.

Para regresar al menú anterior haga clic en el botón "*Done*". Ahora, repita el mismo proceso para graficar los residuos versus el ingreso de los hogares (INC). Obtendrá el siguiente gráfico.

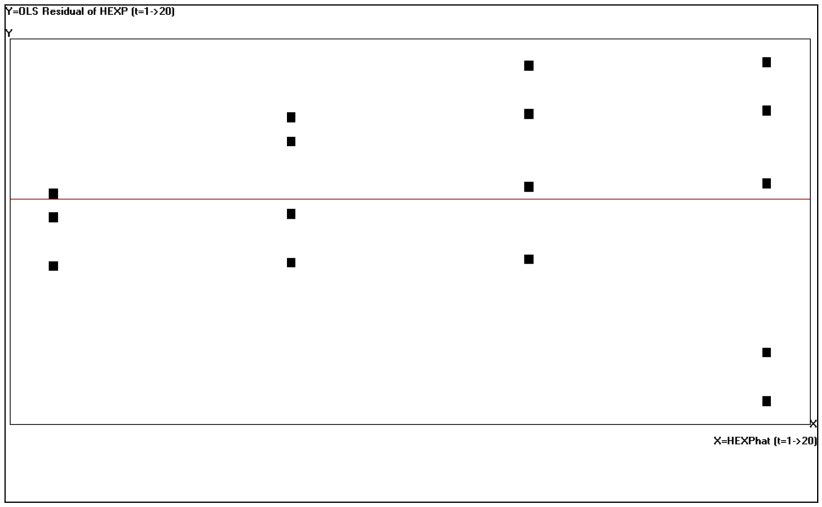
Gráfico 2. Errores Estimados versus el Ingreso



Claramente vemos que la dispersión de los residuos aumenta con el ingreso de los hogares. Este es un síntoma claro de heteroscedasticidad.

Ahora grafique los residuos versus los valores estimados para el gasto de los hogares ($\hat{y}_i$). Primero que todo, necesitamos crear la serie de los $\hat{y}_i$. Esto se puede hacer fácilmente a partir de las series de los residuos MCO ($\hat{\varepsilon}_i$) y del gasto observado (y_i). Recuerden que $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i$, entonces $\hat{y}_i = y_i - \hat{\varepsilon}_i$. (Consulte el Tutorial 1 para detalles de cómo crear esta nueva variable por medio del procedimiento "*Linear combination of variables*" en el menú "*Transform Variables*"). Después de realizar las transformaciones requeridas, obtendrán el siguiente gráfico:

Gráfico 3. Errores Estimados versus Gasto Estimado



1.2 Gráficos de Dispersión de los Cuadrados de los Residuos Estimados, las Variables Independientes y la Variable Dependiente Estimada.

Antes de realizar estos gráficos, será necesario crear la serie de los residuos al cuadrado, por medio de la rutina "*Input/Transform variables/multiplicative combination of variables*". Ahora, grafique los residuos elevados al cuadrado versus el ingreso de los hogares. Repita el procedimiento para obtener un gráfico de los residuos al cuadrado versus los valores estimados para el gasto de los hogares. Usted obtendrá los siguientes gráficos.

Gráfico 4. Errores Estimados al cuadrado versus Ingreso

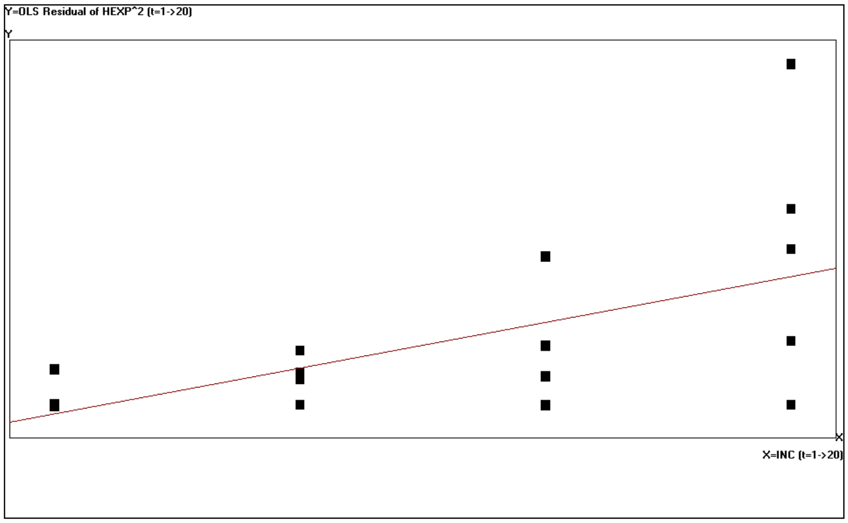
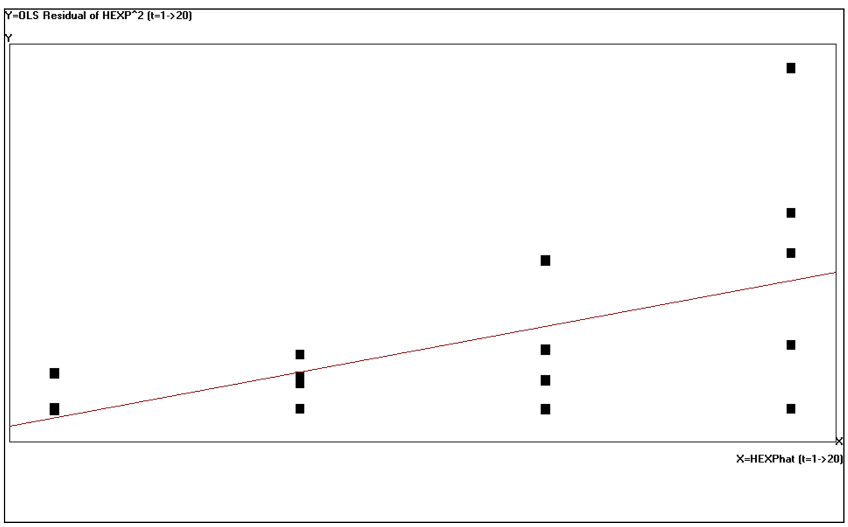


Gráfico 5. Errores Estimados al cuadrado versus Gasto Estimado



Todos los gráficos nos llevan a intuir la presencia de un problema de heteroscedasticidad en los residuos de esta regresión. En las siguientes secciones discutiremos como efectuar tres pruebas para detectar formalmente la presencia de heteroscedasticidad.

2 Pruebas de Heteroscedasticidad

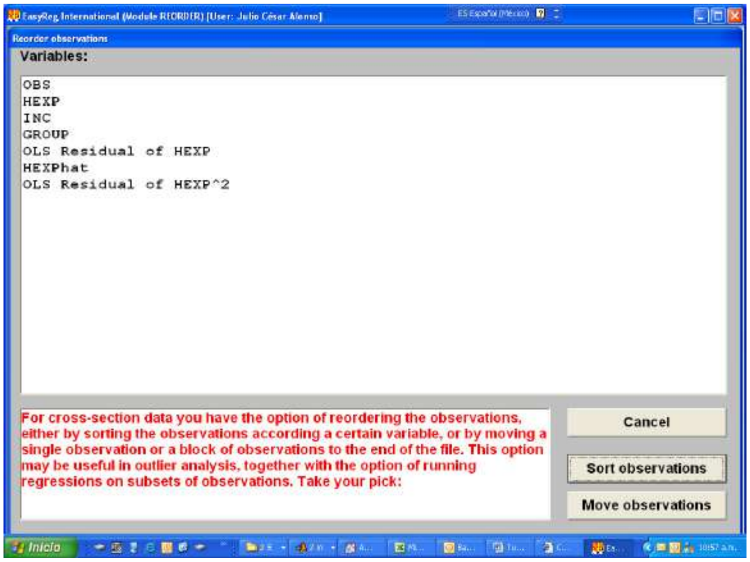
2.1 Cálculos para la prueba de Goldfeld y Quandt

La prueba de GOldfeld y Quandt implica como hipótesis nula la presencia de homoscedasticidad versus la hipótesis alterna que $\sigma_i^2 = \sigma^2 X_{p,i}^2$, donde X_p corresponde a una variable que se sospecha está creando el problema de heteroscedasticidad. Esta prueba involucra los siguientes pasos:

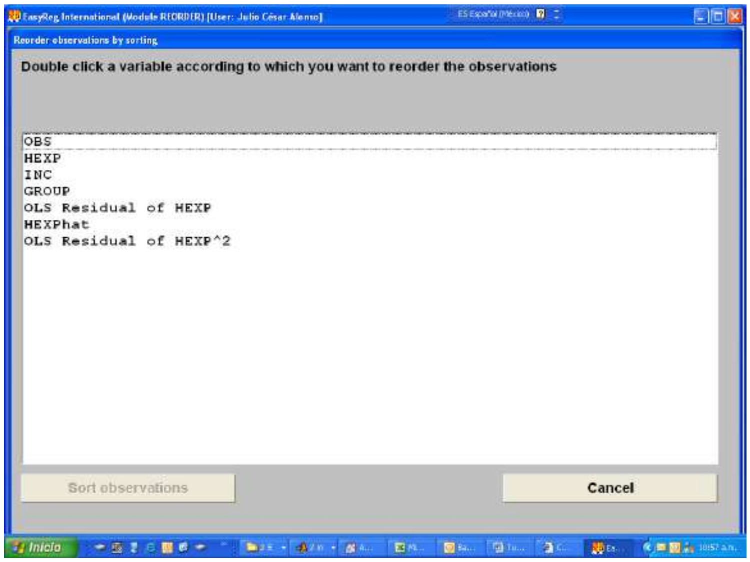
1. Ordenar los datos de menor a mayor de acuerdo a la variable independiente $X_{p,i}$ (que se crea está relacionado con la varianza del error).
2. Omita los *d* datos de la mitad ($d < \frac{1}{5}n$).
3. Corra dos regresiones, una con los datos asociados a los valores bajos de $X_{p,i}$ (esta será la regresión 1) y otra regresión con los datos asociados a los valores altos de $X_{p,i}$ (esta será la regresión 2).
4. Encuentre SSE_1 y SSE_2.
5. Calcule $F_{GQ} = \frac{SSE_2}{SSE_1}$
6. Compare F_{GQ} con $F_{(n-d-2k,n-d-2k)}$.

Así, el primer paso es ordenar los datos de menor a mayor de acuerdo a la variable que creamos esté causando el problema de heteroscedasticidad, en este caso el ingreso de los hogares (x_i es decir *INC*). Esto se puede realizar fácilmente en EasyReg con la opción "*Menu / Input / Reorder cross-section observations*". Es importante anotar que cuando se trabaja con series de tiempo, esta opción no estará disponible. En este caso usted necesitará organizar los datos con Excel.

Una vez usted escoja esta opción verá la siguiente ventana:



Haga clic en el botón “*Sort observations*” y verá la siguiente ventana:



Ahora escoja la variable que va a servir como criterio para ordenar los datos, es decir, haga clic en "*INC*" y posteriormente en el botón "*Sort observations*". Ahora haga clic en el botón "*Overwrite input file*" y después en el botón "*Done*". Los datos ya han sido organizados de menor a mayor.

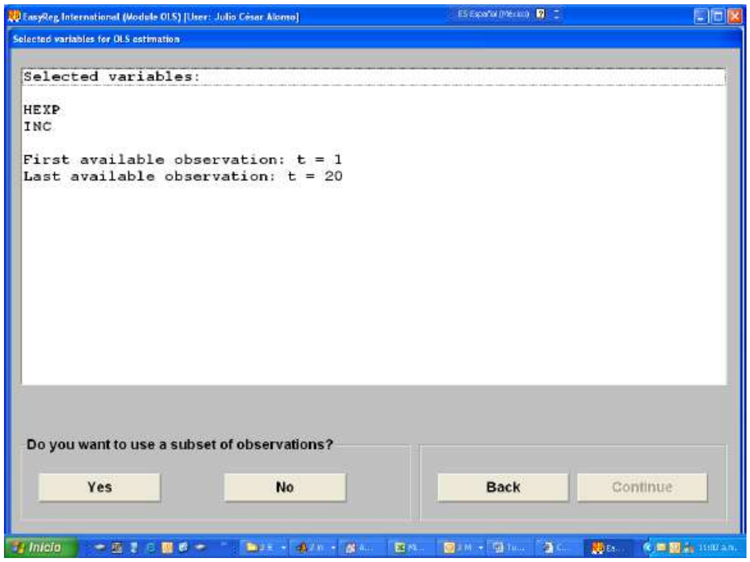
Ahora necesitamos correr dos regresiones, la primera con los datos asociados a los valores bajos de x_i y la segunda con los valores altos de x_i, excluyendo *d* observaciones de la mitad. Esto se puede hacer fácilmente en EasyReg. Primero, determine cuáles van a ser las observaciones que corresponderán a la primera y segunda regresión, es decir, emplearemos las observaciones desde $i = 1, 2, ..n_1$ para la primera regresión y las observaciones $i = n_1 + d, n_1 + d + 1, n_1 + d + 2, ...n$ en la segunda regresión.

En este caso en específico podemos ver que los datos están claramente agrupados en cuatro grupos diferentes, así es posible dividir las observaciones en dos grupos. El primer grupo corresponde a individuos con ingresos iguales o menores que 10.000 dólares y el segundo grupo corresponde a individuos con ingresos mayores o iguales a 15.000 dólares; es decir, para este caso en especial no es necesario omitir las *d* observaciones de la mitad, pues los datos poseen una clara ruptura natural sin necesidad de omitir datos. Por lo tanto, *d*=0. Si usted se enfrenta a un caso en el cual esta ruptura no es natural, entonces si requiere omitir los *d* datos de la mitad.

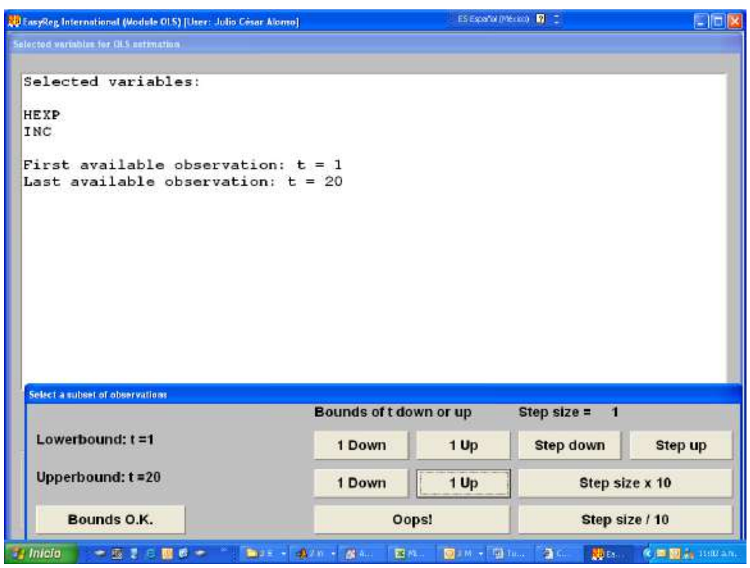
Así, nuestra primera regresión incluirá de la observación (ordenada) número 1 a la 10 y la segunda regresión incluirá de la observación 11 a la 20. Ahora corramos cada una de estas regresiones y extraigamos el SSE (recuerde que el SSE corresponde al RSS reportado por EasyReg) de cada una de las regresiones.

Para correr la primera regresión, haga clic en "*Menu / Single equation models / linear regresion models*".

Ahora escoja las variables involucradas en la regresión y haga clic en el botón "*Selection OK*". En la siguiente ventana haga clic en el botón "*Yes*" (Esto le permitirá escoger la sub-muestra que quiere emplear para la estimación del modelo).



Observará la siguiente ventana:



Con los botones "*1 Down*" y "*1 Up*" escoja la muestra de tal forma que el "*Lowerbound: t=1*" y el "*Upperbound: t=10*". Posteriormente, haga clic en "*Bounds OK*". Ahora haga clic en "C*ontinue*", después en "*Confirm*" y nuevamente en "C*ontinue*". Ahora prosiga con los pasos que usted realiza normalmente para la estimación de un modelo. Encontrará que el SSE_1=0.3000.

Repita los pasos anteriores y corra la regresión con las observaciones asociadas a los valores altos de x_i, es decir, de la observación 11 a la 20. Encontrará que *SSE*$_2$= 2.0240. Ahora podemos calcular el estadístico $F_{GQ} = \frac{SSE_2}{SSE_1} = \frac{2.024}{0.300} = 6.7$. Este F_{GQ} lo comparamos con el $F_{(16,16),\alpha=.01} = 3.44$. Así, dado que $F_{GQ} > F_{(16,16),\alpha=.01}$, podemos rechazar la hipótesis nula en favor de la hipótesis de heteroscedasticidad.

2.2 Cálculos para la prueba de Breusch-Pagan (1979)

La prueba Breusch-Pagan implica probar la hipótesis nula de hooscedasticidad versus la alterna $H_A : \sigma_i^2 = f\left(\gamma + \delta X_i\right)$. Los pasos para efectuar esta prueba son los siguientes:

1. Corra el modelo original $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$ y encuentre la serie de los residuos.
2. Calcule $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n}$.
3. Estime la siguiente regresión auxiliar: $\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \gamma + \delta x_i + \mu_i$.
4. Construya los SSR de la última regresión.
5. Calcule $BP = \frac{SSR}{2}$.
6. Compare BP con χ_1^2

Note que previamente hemos efectuado el paso 1. Ahora necesitamos hacer el cálculo requerido en el paso 2, es decir, necesitamos encontrar $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n}$. Para efectuar este cálculo podemos emplear los resultados arrojados por la regresión inicial. Recuerde que $\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} = SSE$ así tenemos que $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon}}{n} = \frac{2.504600}{20} = 0.12523$.

Anteriormente habíamos creado la serie de los residuos al cuadrado, así ahora sólo necesitamos dividir esa serie por 0.12523 (esto se puede realizar al emplear la opción de "*linear combination of variables*" (en el menú de "*Transform variables*") y multiplicar por $1/.12523=7{,}985307$) para obtener la serie que será empleada como variable dependiente en el siguiente paso. Cree esta nueva variable y llámela ERBP. Ahora corra la regresión auxiliar. Encontrará que para la regresión auxiliar tenemos que SSR = 38.142715 - 24.410787 = 13.731928. Por lo tanto, $BP = \frac{SSR}{2} = \frac{13.731928}{2} = 6.866$. Este estadístico BP lo comparamos con $\chi^2_{1,\alpha=o.o5} = 3.84$. Dado que $BP > \chi^2_1$, entonces podemos rechazar la hipótesis nula a favor de la presencia de heteroscedasticidad.

Si ustedes miran cuidadosamente los resultados de la estimación del modelo original (ver Tabla 1) ahí se reporta la prueba de Breusch-Pagan. En este caso, el estadístico es exactamente igual al que nosotros encontramos. Es importante anotar que el estadístico de Breusch-Pagan que calcula automáticamente EasyReg es el que corresponde a la hipótesis alterna que $H_A : \sigma_i^2 = f\left(\gamma + \delta Z_i\right)$, donde $Z_i = \left(x_{1i} \quad x_{2i} \quad \dots \quad x_{ki}\right)$. Es decir, se asume que todas las variables independientes involucradas en el modelo (menos el intercepto) afectan a la varianza del término de error. Como en este caso sólo tenemos una variable independiente en el modelo, entonces estos dos estadísticos coinciden. Pero cuando tenemos más de una variable independiente, el estadístico calculado automáticamente por EasyReg no será el mismo que si consideramos que solo una variable independiente afecta la varianza!!!

2.3 Cálculos para el Test de White (1980)

La prueba de White contrasta la hipótesis nula de no heteroscedasticidad versus la alterna de heteroscedasticidad. Esta prueba implica los siguientes pasos:

1. Corra el modelo original y encuentre la serie de los residuos.
2. Posteriormente, corra la siguiente regresión auxiliar:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \gamma + \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \delta_s X_{mi} X_{ji} + \mu_i = \gamma + \delta_1 x_i + \delta_2 x_i^2 + \mu$$

3. Calcule el R^2 de la última regresión.
4. Calcule $W_a = nR^2$
5. Compare W_a con χ_2^2

Note que de los cálculos anteriores ya tenemos la serie de los residuos elevada al cuadrado, así que sólo tenemos que crear la serie x_i^2 para correr la regresión auxiliar. Cree esta nueva variable y corra la regresión auxiliar. Encontrará que el R^2 de la regresión auxiliar es 0.412966. Así, $W_a = nR^2 = 20 \times 0.412966 = 8.259$. Este estadístico lo comparamos con $\chi^2_{2,\alpha=0.05} = 5.99$. Entonces, podemos rechazar la hipótesis nula de que existe homoscedasticidad.

3 Estimador Consistente de White para la Matriz de Varianzas y Covarianzas y t-calculados Corregidos por la Presencia de Heteroscedasticidad.

Recuerden que cuando estimamos un modelo por el método de MCO en presencia de heteroscedasticidad, los estimadores de los β´s son insesgados, pero el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de los betas estimados es sesgado. White (1980) sugiere el siguiente estimador consistente para la matriz de varianzas y covarianzas de los betas estimados en presencia de heteroscedasticidad:

$Est.Var\left[\hat{\beta}\right] = n\left(X^T X\right)^{-1} S_0 \left(X^T X\right)^{-1}$, donde $S_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 x_i x_i^T$ y $x_i^T = \begin{pmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} & \dots & x_{ki} \end{pmatrix}$.

Cuando estimamos una regresión lineal, EasyReg calcula automáticamente esta varianza, exista o no problema de heteroscedasticidad. Así, ustedes deben tener cuidado para saber cuándo se debe emplear esta matriz.

Corra el modelo original, i.e., $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, y obtendrán los siguientes resultados:

Tabla 1. Resultados del modelo estimado $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$

```
Dependent variable:
Y = HEXP
Characteristics:
HEXP
  First observation = 1
  Last observation  = 20
  Number of usable observations: 20
  Minimum value: 1.8000000E+000
  Maximum value: 6.2000000E+000
  Sample mean:   3.8550000E+000

X variables:
X(1) = INC
X(2) = 1
WARNING: The effective degrees or freedom is only 18.
Therefore, the estimation results may be unreliable!

Model:
Y = b(1)X(1) + b(2)X(2)  + U,
where U is the error term, satisfying
E[U|X(1),X(2)] = 0.

OLS estimation results
Parameters  Estimate   t-value      H.C. t-value
                       (S.E.)       (H.C. S.E.)
                       [p-value]    [H.C. p-value]
b(1)         0.23720   15.897        14.195
                       (0.01492)    (0.01671)
                       [0.00000]    [0.00000]
b(2)         0.89000    4.356         5.651
                       (0.20431)    (0.15750)
```

[0.00001] [0.00000]

Notes:

1: S.E. = Standard error

2: H.C. = Heteroskedasticity Consistent. These t-values and standard errors are based on White's heteroskedasticity consistent variance matrix.

3: The two-sided p-values are based on the normal approximation.

Effective sample size (n):	20
Variance of the residuals:	0.139144
Standard error of the residuals (SER):	0.373021
Residual sum of squares (RSS):	2.5046
(Also called SSR = Sum of Squared Residuals)	
Total sum of squares (TSS):	37.6695
R-square:	0.933511
Adjusted R-square:	0.929817

Tabla 1. Resultados del modelo estimado $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$**. (Cont.)**

```
Jarque-Bera/Salmon-Kiefer test = 0.678736
Null hypothesis:   The errors are normally distributed
Null distribution: Chi-square(2))
p-value = 0.71222
Significance levels:       10%        5%
Critical values:          4.61       5.99
Conclusions:            accept     accept

Breusch-Pagan test = 6.865964
Null hypothesis:   The errors are homoskedastic
Null distribution: Chi-square(1)
p-value = 0.00879
Significance levels:       10%        5%
Critical values:          2.71       3.84
Conclusions:            reject     reject

Information criteria:
Akaike:            -1.87760E+00
Hannan-Quinn:      -1.85817E+00
Schwarz:           -1.77803E+00

If the model is correctly specified, in the sense that the conditional
expectation of the model error U relative to the X variables equals
zero, then the OLS parameter estimators b(1),b(2), minus their true
values, times the square root of the sample size n, are
(asymptotically) jointly normally distributed with zero mean vector and
variance matrix:

 4.45262222E-03 -5.56577778E-02
-5.56577778E-02  8.34866667E-01
```

provided that the conditional variance of the model error U is constant
(U is homoskedastic), or

5.58459733E-03 -4.91825778E-02
-4.91825778E-02 4.96115556E-01
if the conditional variance of the model error U is not constant
(U is heteroskedastic).

La última matriz que ustedes observan en los resultados de EasyReg corresponde al estimador consistente de White para la matriz de varianzas y covarianzas de los β´s estimados. En presencia de heteroscedasticidad, los valores estimados a partir del estimador consistente de White (1980) para la matriz de varianzas y covarianzas de los β´s estimados es ($n = 20$):

$$\frac{1}{n}\begin{bmatrix} 0.0055845 & -0.0491825 \\ -0.0491825 & 0.4961155 \end{bmatrix}$$

Basados en esta matriz, podemos recalcular los t-calculados, de tal forma que tengan en cuenta el estimador consistente de las varianzas de los β´s estimados. Esto también lo hace automáticamente EasyReg. Estos t-calculados corresponden a la columna con encabezado "*H.C. t-value(*)*" y su correspondiente "*p-value*" se encuentra debajo entre corchetes. Por ejemplo, el "*t-value*" corregido por heteroscedasticidad para el coeficiente asociado al ingreso es de 14.963 con un "*p-value*" de 0.000.

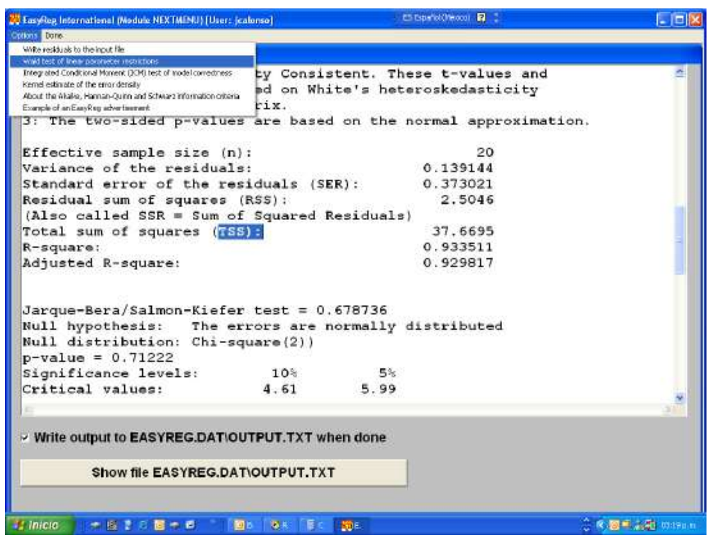
4 Prueba sobre Restricciones Lineales de los Parámetros en Presencia de Heteroscedasticidad.

Recuerden que el F-calculado que tradicionalmente empleamos para probar hipótesis de la forma $R\beta = C$ no es válido en presencia de heteroscedasticidad. Para probar dicha hipótesis, debemos emplear el siguiente estadístico de Wald:

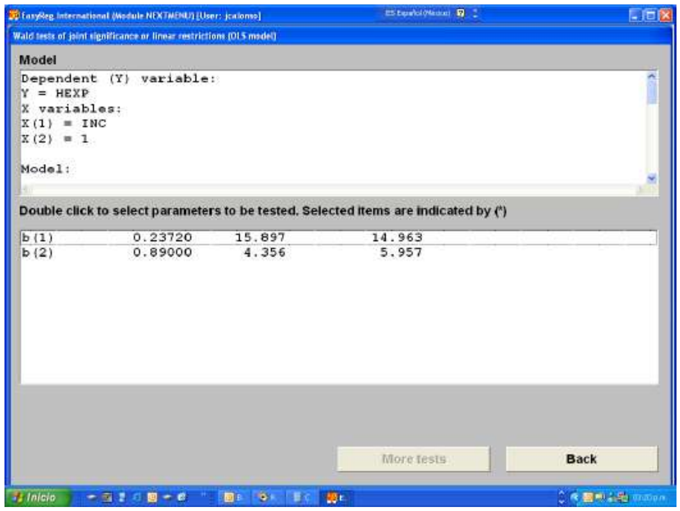
$$W = \left(c - R\hat{\beta}\right)^T \left(R\left(Est.Var\left[\hat{\beta}\right]\right)R^T\right)^{-1}\left(c - R\hat{\beta}\right)$$

Este estadístico se compara con χ_r^2 (para mayor detalle de cómo emplear el estadístico Wald en general vea el Tutorial 1). En este caso será necesario emplear el estimador consistente para $Var\left[\hat{\beta}\right]$ sugerido por White (1980).

Supongamos que queremos probar la hipótesis nula que $\alpha = \beta = 0$. Esta hipótesis se puede probar fácilmente con EasyReg. Para efectuar esta prueba, corra la regresión original, i.e., $y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$. después de obtener los resultados de la regresión, haga clic en el menú "*Options*" y escoja la opción "*Wald test of linear parameters restrictions*".



Observará la siguiente ventana:



Esta ventana le permite escoger los coeficientes involucrados en el test a realizar. Para contrastar $H_0 : \alpha = \beta = 0$, haga doble clic en las líneas correspondientes a b(1) y b(2) – estos coeficientes corresponden a los estimadores MCO para α y β. Una vez estén seleccionados estos coeficientes, haga clic en el botón "*Test joint significance*". (En general esta opción prueba la hipótesis nula que los coeficientes seleccionados son conjuntamente iguales a cero). El resultado de este cálculo aparecerá en la ventana siguiente.

Tabla 2. Resultados del test de Wald para $H_0 : \alpha = \beta = 0$.

```
Wald test:
b(1)      0.23720    15.897        14.195(*)
b(2)      0.89000     4.356         5.651 (*)
Test of the null hypothesis that the parameters indicated by (*) are jointly zero:
Wald test:                         2388.78
Asymptotic null distribution:  Chi-square(2)
  p-value = 0.00000
  Significance levels:       10%        5%
  Critical values:          4.61       5.99
```

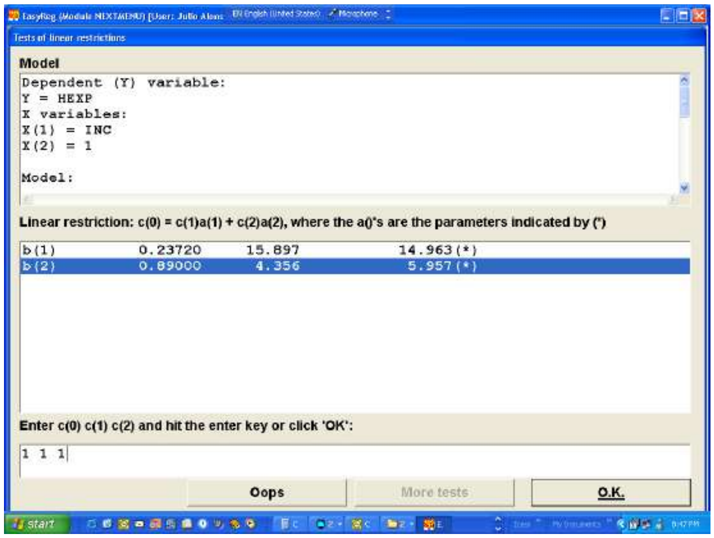
```
  Conclusions:            reject    reject
N.B.: The latter results are based on the Chi-square distribution.
Test result on the basis of the heteroskedasticity consistent variance matrix:
Wald test:                        3019.94
Asymptotic null distribution:  Chi-square(2)
  p-value = 0.00000
  Significance levels:       10%        5%
  Critical values:          4.61       5.99
  Conclusions:            reject    reject
```

El estadístico Wald que tiene en cuenta la corrección por la presencia de heteroscedasticidad es 3355.49, este estadístico sigue una distribución Chi-cuadrado con 2 grados de libertad. Dado que los valores críticos con nivel de significancia del 10% y 5% son respectivamente 4.61 y 5.99, entonces se puede rechazar la hipótesis nula que α y β.son al mismo tiempo iguales a cero. (Note que el p-value para el estadístico Wald es 0.000).

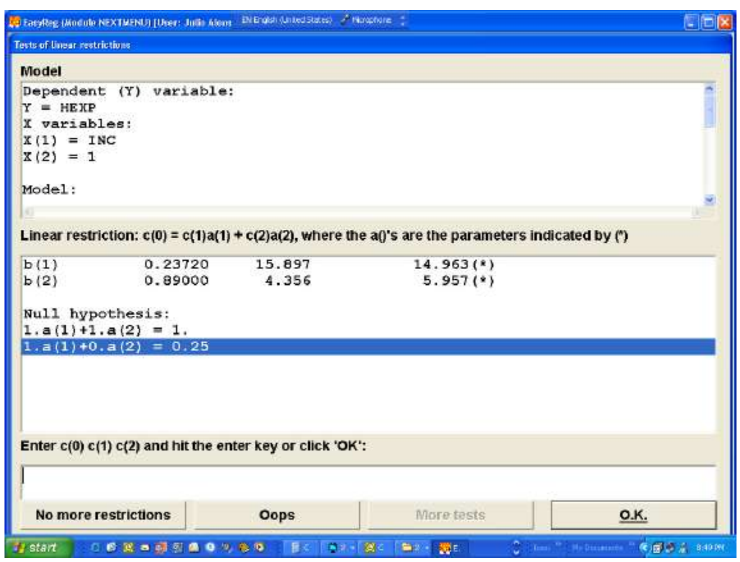
Ahora, suponga que queremos probar la siguiente hipótesis nula $H_0 : \alpha + \beta = 1$ y $\alpha = .25$. Note que esta hipótesis se puede escribir de la forma $R\beta = C$, donde $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$. Además, recuerde que los estimadores para α y β calculados por EasyReg son denominados como b(1) y b(2), respectivamente.

Volviendo a EasyReg, escoja la opción "*Wald test of linear parameters restrictions*", escoja los coeficiente involucrados y haga clic en botón "*Test linear restrictions*". El software requiere que escribamos cada una de las restricciones como una línea (es decir, fila por fila de la matriz *R*), en la forma $c(1) \cdot b(1) + c(2) \cdot b(2) + c(3) \cdot b(3) + \ldots = c(0)$, así para la primera restricción

($\alpha+\beta=1$) tenemos que $c(0)=1$, $c(1)=1$ y $c(2)=1$. Entonces escriba "1 1 1 "[2] en la ventana "*Enter c(0) c(1) c(2) and hit …*".



Haga clic en el botón "*OK*", e introduzca la siguiente restricción ($\beta=0.25$) de la siguiente manera: "0.25 1 0". Haga clic en el botón "*OK*" y nuevamente clic en el botón "*No more restrictions*"



[2] No separe los números con comas u otro signo, sólo sepárelos con un espacio. Además asegúrese que escribe *k+1* números. Siempre el primer número corresponderá al número a la derecha del igual en la hipótesis nula, el segundo corresponde a la siguiente pendiente y así sucesivamente hasta el último número que corresponde al intercepto.

El resultado aparecerá en la siguiente ventana. Haga clic en el botón "*Back*". Los resultados de este cálculo se pueden ver en la Tabla 3 . Note que EasyReg escribe las correspondientes matrices *R* y *C*. En este caso el estadístico Wald es 0.91 que está distribuido Chi-cuadrado con 2 grados de libertad. Como los valores críticos con niveles de significancia 10% y 5% son 4.61 y 5.99 respectivamente, entonces no podemos rechazar la hipótesis nula.

Tabla 3. Resultados del test de Wald para $H_0 : \alpha + \beta = 1$ y $\beta = 1$.

```
Wald test:

b(1)        0.23720     15.897          14.195(*)
b(2)        0.89000      4.356           5.651(*)

Null hypothesis:
1.a(1)+1.a(2) = 1.
1.a(1)+0.a(2) = 0.25
where the a()'s are the parameters indicated by (*)

Null hypothesis in matrix form: Rb = c, where
R =
 1. 1.
 1. 0.
and c =
   1.
 0.25
Wald test on the basis of the standard variance matrix:
Wald test statistic:                     0.79
Asymptotic null distribution:  Chi-square(2)
  p-value = 0.67253
  Significance levels:        10%         5%
  Critical values:          4.61       5.99
  Conclusions:             accept     accept
```

```
Wald test on the basis of White's heteroskedasticity consistent
variance matrix:
Wald test statistic:                0.82
Asymptotic null distribution:  Chi-square(2)
  p-value = 0.63305
  Significance levels:      10%       5%
  Critical values:        4.61      5.99
  Conclusions:           accept    accept
```

5 Referencias.

- Bierens, H. J. (2010), "EasyReg International", Department of Economics, Pennsylvania State University(http://econ.la.psu.edu/~hbierens/EASYREG.HTM)

- Breusch, T. S. and A. R. Pagan. 1979. "A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation." *Econometrica*, 47:5, pp. 1287-94.

- White, Halbert. 1980. "A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity." *Econometrica*, 48:4, pp. 817-38.