

NÚMEROS ÍNDICES

Julio César Alonso

CUARTA EDICIÓN

Diciembre 2004



APUNTES DE ECONOMÍA

ISSN 1794-029X

Cuarta edición, diciembre de 2004

Editor

Julio César Alonso C.

icalonso@icesi.edu.co

Asistente de Edición

Stephanie Vergara Rojas

Gestión Editorial

Departamento de Economía - Universidad ICESI

www.icesi.edu.co

Tel: 5552334 ext: 398. Fax: 5551441

Calle 18 #122-135 Cali, Valle del Cauca – Colombia

NÚMEROS ÍNDICES

Julio César Alonso C. ¹

Diciembre de 2004

Resumen

Este documento presenta una breve introducción a los números índice. Se discuten de manera didáctica tanto índices simples como compuestos de cantidades, precios y valores. Se discute como cambiar de base y empalmar índices. Este documento está dirigido principalmente a estudiantes de pregrado de economía, pero por la sencillez del lenguaje, puede ser de utilidad para cualquier estudiante o profesional interesado en la manipulación de números índices.

Palabras claves: Números Índices, Índice de Sauerbeck, Índice de Paasche, Índice de Laspeyres, Cambio de Base.

Apuntes de Economía es una publicación del Departamento de Economía de la Universidad Icesi, cuya finalidad es divulgar las notas de clase de los docentes y brindar material didáctico para la instrucción en el área económica a diferentes niveles. El contenido de esta publicación es responsabilidad absoluta del autor.

¹ Jefe, Departamento de Economía de la Universidad Icesi.

1. Introducción

En el proceso de la toma de decisiones, tanto en el sector privado como en el público, se requieren indicadores que permitan cuantificar en forma resumida el desarrollo de los acontecimientos. Los organismos estatales o privados continuamente publican cifras que sirven de indicadores del estado de diferentes aspectos de la realidad económica y empresarial que son empleados en la toma de decisiones. El uso de esos indicadores es variado y depende en cada oportunidad de su contenido específico. Para evitar problemas, el usuario de estos indicadores requiere conocer previamente lo que existe detrás de ellos en el proceso de su construcción; con el fin de determinar si su empleo es o no el adecuado.

Es difícil resumir en un solo número el comportamiento de una variable económica, pero precisamente los números índices intentan recoger en una sola cifra la variación de una variable o un conjunto de ellas, independientemente de las unidades que se empleen en la medición. Con mayor precisión, ***un número índice se define como una cifra relativa que recoge las variaciones promedio en precios, cantidades o valores de una o más variables durante un período respecto a un período determinado.*** En otras palabras, un número índice refleja las variaciones relativas, y no absolutas, que experimenta una variable económica, ya sea ésta el precio de un bien, el nivel de precios de la economía, el valor de las exportaciones, o el producto interno bruto. Al ser una medida relativa, los índices carecen de unidades, hecho que permite su utilización para comparaciones en el tiempo y en el espacio (entre dos o más ciudades, regiones, y/o países).

Así, encontraremos índices que reflejan la evolución en el tiempo de:

1. Un único precio (p_t), como por ejemplo el precio del Café en la bolsa de Nueva York, el precio del dólar, el salario promedio, etc.

2. Una cantidad (Q_t), como por ejemplo las toneladas exportadas de café, las unidades producidas por una fábrica, la cantidad de celulares vendidos, las horas promedio trabajadas por los asalariados, etc.
3. El valor de una transacción ($P_t Q_t$), como por ejemplo el valor en dólares o pesos de las exportaciones de café, el valor en pesos o dólares de las ventas de carros, los ingresos percibidos por los asalariados, etc.
4. El valor de una canasta de bienes o servicios $\left(\sum_{i=1}^n P_{i,t} Q_{i,t} \right)$, como por ejemplo la evolución del valor de la canasta familiar, la evolución del valor de los artículos que se emplean comúnmente para producir bienes en el sector manufacturero, etc.

Las primeras tres clases de números índice son denominados índices simples, mientras que la última clase se le denominan índices compuestos o agregativos.

En la segunda sección de este documento se discute la construcción de los índices simples, dejando para la tercera sección los índices compuestos. En la cuarta parte se discuten algunas operaciones importantes en la práctica de los economistas que involucran los números índices como es el cambio de base entre otras.

TABLA 1-1 Glosario

Índice	Cifra relativa (expresada en forma de porcentaje), que representa las variaciones medias en precio, cantidad o valor, de uno o más ítems en un período dado, respecto a un período "base" o de "referencia".
Índice compuesto	Representa la evolución de un conjunto de variables respecto al período base.
Índice simple	Representa la evolución de una única variable respecto al período base.
Período Base	Período que sirve como línea de comparación y en el caso de los

	índices compuestos es el período para el que se establece la estructura de ponderaciones del índice
Período Referencia	Período para el cual un índice (simple o compuesto) es igual a 100. En el caso de un índice simple el período referencia y la base coinciden, hecho que no necesariamente es cierto para un índice compuesto.
Ponderaciones	La importancia (peso relativo) que se le asigna a cada una de las variables que conforman un índice compuesto.

2. Índices Simples

Antes de entrar en materia, recordemos la definición de un número índice, ***un número índice es una cifra relativa que recoge las variaciones promedio en precios, cantidades o valores de una variable durante un período respecto a un período determinado.*** Como se mencionó anteriormente, el hecho de ser una medida relativa evita que los números índices tengan unidades, cualidad importante al momento de realizar comparaciones en el tiempo o entre regiones.

Pero si los números índices son una medida relativa, la pregunta que surge es ¿relativa a qué? Como su definición lo anota, todas las variaciones se miden respecto a un período determinado, a este período se le conoce como período base. La elección del período base para la comparación implícita en todo índice depende del uso que se le vaya a dar al índice. En general, para el caso de los índices simples la escogencia del período base no reviste mayor complicación, y convencionalmente se recomienda escoger como base a un período que no presente muchas “anomalías”, es decir, un comportamiento atípico.

Ahora supongamos que contamos con varias observaciones de una variable económica² X_t y deseamos calcular un índice simple (I_t) para el período t ,

² Puede ser el precio de un bien o servicio, las cantidades de un bien o servicio, o el valor de las transacciones efectuadas en torno a un bien o servicio.

empleando como base el período t_0 . En este caso, el índice estará definido de la siguiente forma:

$$I_t = \left(\frac{X_t}{X_{t_0}} \right) \times 100 \quad (1)$$

Noten que (1) representa el porcentaje de cada cifra de la serie, respecto del valor observado en el período base. Así, los distintos índices simples se obtienen dividiendo cada valor anual (o mensual, semanal, etc.) por la cifra del período base y por último multiplicándolo por 100.

En caso que la variable en consideración corresponda a un precio, entonces el índice simple se conoce como un índice (simple) de precios. Si la variable considerada son las cantidades, entonces se le denomina un índice (simple) de cantidades (o también conocido como un índice de volumen). Si por el contrario la variable bajo consideración es el valor en pesos de una transacción (precio multiplicado por cantidades) entonces el índice se denominará un índice (simple) de valor.

EJEMPLO 2-1. Cálculo de Índices (simples) de Precios, Cantidades y Valor.

A partir de la información, reportada en la TABLA 2-1, de la producción, precio y valor de la producción de mora para el municipio de Cali, calcule los índices de precios, cantidades y valor, tomando como base el año 1998.

TABLA 2-1. Precio, Cantidades Producidas y Valor de la Producción de Mora en el Municipio de Cali*

(1996 – 2001)			
Año	Precio promedio (miles de \$/ ton)	Cantidades producidas (Ton.)	Valor de la Producción (Miles de \$)
1996	540	31	16,740
1997	670	31	20,770
1998	1500	24	36,000
1999	1200	48	57,600
2000	1350	48	64,800
2001	1500	39	58,500

*Fuente: URPA – Cali

EJEMPLO 2-1. Cálculo de Índices (simples) de Precios, Cantidades y Valor. (Cont.)
RESPUESTA:

Para calcular el índice simple de precios para el municipio de Cali con base 1998, se requiere efectuar la siguiente operación:

$$I_t^p = 100 \left(\frac{P_t}{P_{1998}} \right) = 100 \left(\frac{P_t}{1500} \right) \text{ para } t = 1996, 1997, \dots, 2001.$$

Los resultados del cálculo de este índice de precios se reportan en la TABLA 2-2.

TABLA 2-2. Precio e índice de precios de la Mora en el Municipio de Cali
(1996 – 2001)

Año	Precio promedio (miles de \$/ ton)	Índice de precios (1998=100)
1996	540	36
1997	670	44.67
1998	1500	100
1999	1200	80
2000	1350	90
2001	1500	100

Fuente: URPA – Cali y Cálculos Propios

Similarmente, los índices de volumen y valor se calculan de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$I_t^q = 100 \left(\frac{Q_t}{Q_{1998}} \right) = 100 \left(\frac{Q_t}{24} \right) \quad \text{y} \quad I_t^{pq} = 100 \left(\frac{P_t Q_t}{P_{1998} Q_{1998}} \right) = 100 \left(\frac{Q_t}{36,000} \right)$$

para $t = 1996, 1997, \dots, 2001$. Los resultados se presentan en la TABLA 2-3.

EJEMPLO 2-1. Cálculo de Índices (simples) de Precios, Cantidades y Valor. (Cont.)

TABLA 2-3. Índice de precios, Cantidades y Valor para la Mora en el Municipio de Cali
(1996 – 2001)

Año	Precio promedio (miles de \$/ ton)	Índice de precios (1998=100)	Cantidades producidas (Ton.)	Índice de cantidades (1998=100)	Valor de la Producción (Miles de \$)	Índice de valor (1998=100)
1996	540	36	31	129.2	16,740	46.5
1997	670	44.67	31	129.2	20,770	57.7
1998	1500	100	24	100.0	36,000	100.0
1999	1200	80	48	200.0	57,600	160.0
2000	1350	90	48	200.0	64,800	180.0
2001	1500	100	39	162.5	58,500	162.5

Fuente: Cálculos Propios

2.1. Características de los números índices y su utilidad

Regresando a los índices simples, es importante mencionar varias características de los índices. Estas características son:

- Los índices siempre serán igual a 100 para el año base³ (esta característica es conocida como la propiedad de identidad (Lora (1987)).
- Los índices no cambiarán si las unidades en que se miden las variables de la serie son cambiadas, es decir, no dependen de las unidades⁴.
- Los índices carecen de unidades⁵.

³ Claramente, tendremos que $I_0 = 100 \left(\frac{X_{t_0}}{X_{t_0}} \right) = 100$.

⁴ Si multiplicamos todos los elementos de la serie por una constante c , tenemos que $I_t = 100 \left(\frac{cX_t}{cX_{t_0}} \right) = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t_0}} \right)$, es decir, el índice será igual al inicial.

⁵ Sin perder generalidad, suponga que X es medida en pesos por tonelada. Entonces tendremos que $I_t = 100 \left(\frac{X_t \text{ \$/Ton.}}{cX_{t_0} \text{ \$/Ton.}} \right) = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t_0}} \right)$, es decir, el índice carece de unidades.

En la introducción de este documento se mencionó que los números índices permiten describir la evolución de una variable. Ya hemos visto como calcular los índices, ahora veamos ¿cómo nos ayuda esto a estudiar la evolución de la variable?

Los números índices permiten conocer rápidamente la variación porcentual ocurrida entre cualquier periodo y el período base. Noten que dicha variación porcentual viene dada por:

$$\Delta\%_{(t,t_0)} = 100 \left(\frac{X_t - X_{t_0}}{X_{t_0}} \right) = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t_0}} - 1 \right) = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t_0}} \right) - 100 = I_t - I_0 \quad (2)$$

En donde, $t > t_0$. Es decir, para conocer el crecimiento porcentual de una variable entre el período base y el período t , sólo necesitamos restarle 100 al índice simple del periodo t .

Es importante resaltar que la expresión (2) funcionará si y solamente si estamos comparando un periodo más reciente con el período base⁶. Siguiendo el EJEMPLO 2-1, para conocer el cambio porcentual del precio de la mora entre 1998 y el 2000, sólo necesitamos restarle 100 a 90. Es decir, el precio de la mora decreció en 10%, para el período 1998- 2000.

En caso que se desee calcular el cambio porcentual período a período, es decir, entre el período t y $t - 1$, los índices también nos permite realizar estos cálculos. Por ejemplo, el cambio porcentual de la variable bajo estudio entre el período t y $t - 1$ está dado por:

$$\Delta\%_{(t,t-1)} = 100 \left(\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \right) = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} - 1 \right) = 100 \left(\frac{X_t/X_{t_0}}{X_{t-1}/X_{t_0}} - 1 \right) = 100 \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} - 1 \right) \quad (3)$$

En otras palabras, el cambio porcentual en la variable X es igual al cambio porcentual en su índice.

⁶ En caso que se desee comparar el año base con un período anterior a este, entonces la expresión (2) se convertirá en: $\Delta\%_{t_0-t} = 100 \left(\frac{X_{t_0} - X_t}{X_t} \right) = 100 \left(\frac{X_{t_0}}{X_t} - 1 \right) = 100 \left(\frac{1}{I_t} - 1 \right)$.

EJEMPLO 2.2. Cálculo del Crecimiento Porcentual de una Variable a partir de un Índice

Continuando con el EJEMPLO 2-1, calcule el cambio porcentual anual en el precio de la mora en el municipio de Cali durante el período.

RESPUESTA:

Como se discutió, el crecimiento porcentual anual del precio será:

$$\Delta p_t \%_{t-(t-1)} = 100 \left(\frac{I_t^p}{I_{t-1}^p} - 1 \right) \text{ para } t = 1996, 1997, \dots, 2001.$$

Los resultados del cálculo de este índice de precios se reportan en la TABLA 2-4.

TABLA 2-4. Crecimiento Porcentual del Precio de la Mora en el Municipio de Cali
(1996 – 2001)

Año	Índice de precios (1998=100)	Cambio % anual
1996	36	--
1997	44.67	24.07
1998	100	123.88
1999	80	-20.00
2000	90	12.50
2001	100	11.11

Fuente: Cálculos Propios

2.2. Relaciones entre los Índices de precios, cantidades y valor

Es importante anotar la estrecha relación que existe entre los índices simples de precios, cantidades y valor. Es claro que el valor de una transacción en el período t corresponde a:

$$V_t = Q_t p_t \quad (4)$$

Ahora dividamos ambos lados de la ecuación por el valor de la transacción en el período base t_0 , es decir,

$$\frac{V_t}{V_{t_0}} = \frac{Q_t p_t}{V_{t_0}} = \frac{Q_t p_t}{Q_{t_0} p_{t_0}}$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por 100 tendremos:

$$100 \cdot \frac{V_t}{V_{t_0}} = 100 \cdot \frac{Q_t}{Q_{t_0}} \cdot \frac{p_t}{p_{t_0}}$$

Y, empleando la definición de los índices de precios, cantidades y de valor, tenemos que:

$$100 \cdot \frac{V_t}{V_{t_0}} = 100 \cdot \frac{Q_t}{Q_{t_0}} \cdot \frac{100}{100} \cdot \frac{p_t}{p_{t_0}} \cdot \frac{100}{100}$$

$$I_t^V = \frac{I_t^Q \cdot I_t^P}{100} \quad (5)$$

Es decir, si conocemos dos de los índices, podremos encontrar el tercero por medio de la relación expresada en (5). Este resultado se puede constatar en el EJEMPLO 2-1.

2.3. Índices Simples con base variable

En muchas oportunidades se necesita o conviene expresar cada cifra de una serie cronológica, en relación a la anterior. Para ello se divide el dato del período t por el dato del período $t - 1$. Es decir, se divide el primer dato por el segundo, posteriormente se divide la tercera cifra por la segunda y así sucesivamente. Estos cocientes, multiplicados por 100, constituyen los índices de base variable. Cada uno señala la relación de la cifra del período con la del período inmediatamente anterior. Si el índice con base variable es menor que 100, implica una disminución porcentual y en caso contrario un crecimiento.

Cada índice de base variable constituye un “eslabón” de una cadena que descompone un índice de base fija. Por ejemplo, suponga que cuenta con dos números índice consecutivos con base variable $(I_t^{BASE (t-1)}, I_{t-1}^{BASE (t-2)})$, entonces empleando estos índices

de base variable se podrá construir un índice para el período t con base fija en el período $t-2$ de la siguiente forma⁷:

$$I_t^{BASE (t-2)} = \frac{I_{t-1}^{BASE (t-2)} \cdot I_t^{BASE (t-1)}}{100} \quad (6)$$

En general, si se cuenta con una serie de k índices con base variable, se podrá encontrar un índice de base fija para el período t con base fija en el período $t-k$ de la siguiente manera:

$$I_t^{BASE (t-k)} = \frac{I_{t-k-1}^{BASE (t-k)} \cdot I_{t-k-2}^{BASE (t-k-1)} \cdot \dots \cdot I_{t-1}^{BASE (t-2)} \cdot I_t^{BASE (t-1)}}{100^{k-1}} \quad (7)$$

Es importante anotar que el encadenamiento se ha aplicado, en este caso, a un índice simple. Pero también se puede extender el procedimiento a índices ponderados o compuestos.

EJEMPLO 2.3. Cálculo de un Índice (simple) de Precios con base variable.

A partir de la información reportada en la TABLA 2-1, calcule un índice de precios con base variable para el precio de la mora en el municipio de Cali.

RESPUESTA:

Para calcular el índice con base variable de los precios de la mora para el municipio de Cali, se requiere efectuar la siguiente operación: $I_t^{BASE t-1} = 100 \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right)$. Los resultados se presentan en la TABLA 2-5.

⁷ Es muy fácil demostrar que (6) es correcto, note que:

$$\frac{I_{t-1}^{BASE (t-2)} \cdot I_t^{BASE (t-1)}}{100} = \frac{100 \left(\frac{X_{t-1}}{X_{t-2}} \right) \cdot 100 \left(\frac{X_t}{X_{t-1}} \right)}{100} = 100 \left(\frac{X_t}{X_{t-2}} \right) = I_t^{BASE (t-2)}$$

EJEMPLO 2.3. Cálculo de un Índice (simple) de Precios con base variable (Cont.)
TABLA 2-5. Precio e índice de Precios con base flexible de la Mora en el Municipio de Cali

(1996 – 2001)

Año	Precio promedio (miles de \$/ ton)	Índice de precios (Base variable)
1996	540	--
1997	670	124.07
1998	1500	223.88
1999	1200	80.00
2000	1350	112.50
2001	1500	111.11

Fuente: URPA – Cali, cálculos propios

3. Índices Compuestos

El mayor uso de los índices se presenta en la construcción de **una sola cifra**, que recoja el comportamiento de variaciones de más de una variable de relevancia económica. Así, un número índice compuesto se define como un número que combina la variación de un conjunto de variables (X_i) mediante un conjunto de ponderaciones w_i , las cuales determinan el peso final que tendrá cada variable en el número índice.

Por lo general los índices compuestos más empleados corresponden a los índices de precios y en menor medida a los índices compuestos de cantidades. En la siguiente sección se describirán diferentes métodos que se emplean para construir índices de precios compuestos, dejando la discusión de los índices de cantidades para la segunda sección.

3.1. Tipos de ponderaciones más comunes en la construcción de índices de precios

Si se tienen los precios de diversos artículos, podría calcularse un número índice que recoja la variación de los diversos precios de los artículos bajo estudio. Este índice permitirá resumir el comportamiento de los precios de esa canasta o conjunto de artículos.

Análogamente a la definición de un índice compuesto, un índice de precios compuesto será una cifra que combina la variación de un conjunto de n precios en el período t ($p_{i,t}$ con $i=1,2,\dots,n$) mediante un conjunto de ponderaciones w_i . Fisher (1927) describe 134 fórmulas diferentes para construir números índices y asignar sus ponderaciones. Posteriormente numerosos autores han complementado este trabajo con novedosas formas de cálculos de índices. A continuación se presentan las formas más “populares” de calcular dichas ponderaciones.

3.1.1. Índice de Sauerbeck o de iguales ponderaciones

En la Sección 2 se discutió la construcción de índices de precios simples, en los cuales sólo se involucra un precio y definíamos un índice de precios simple con año base t_0 como:

$$I_t^p = 100 \left(\frac{p_t}{p_{t_0}} \right)$$

Ahora supongamos que deseamos construir el índice de precios para un conjunto de n precios. En este caso, se podrían combinar los respectivos índices simples de cada precio ($I_t^{p_i} = 100(p_{i,t}/p_{i,t_0})$) dándole igual ponderación a cada uno de los índices

simples: $w_i = \frac{1}{n}$. Es decir, el índice de precios de Sauerbeck para un conjunto de n

precios, en el período t y con año base t_0 se define como:

$$IS_t = \sum_{i=1}^n w_i I_t^{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} I_t^{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n I_t^{p_i}}{n} \quad (8)$$

Pero este índice tiene varios problemas, el primero es que obviamente trata a todos los precios por igual y especialmente en la práctica, sus variaciones, no tienen igual importancia desde el punto de vista del analista, ya sea un gremio de productores, un consumidor o el gobierno.

Para calcular un índice de precios más adecuado, debe establecerse la importancia o “ponderación” de cada artículo. Esta ponderación puede ser fija o constante. Las ponderaciones fijas tienen la desventaja de que ellas pueden no reflejar el cambio en la importancia relativa de los bienes de la canasta bajo estudio. Por otro lado, esta dificultad se puede salvar mediante ponderaciones variables conforme a los cambios en los hábitos y a otras circunstancias. Pero en este último caso, las variaciones del índice obedecen a una mezcla inseparable de alteraciones de precios y de ponderaciones.

3.1.2. Índice de Laspeyres

El índice de Laspeyres emplea ponderaciones fijas que corresponden a la participación del gasto en cada uno de los bienes en el valor total de la canasta del período base t_0 . Es decir, si definimos $Q_{i,t}$ como las unidades del artículo i que está presente en la canasta del período t , entonces las ponderaciones de éste índice corresponden a:

$$w_i = \frac{p_{i,t_0} Q_{i,t_0}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \quad (9)$$

Así, el índice de Laspeyres con base en el período t_0 corresponderá a un promedio ponderado de los índices simples de precios para los i artículos que están presentes en la canasta. En otras palabras:

$$IL_t = \sum_{i=1}^n w_i I_t^{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{p_{i,t_0} Q_{i,t_0}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} I_t^{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t_0} Q_{i,t_0} I_t^{p_i}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \quad (10)$$

La expresión (10) puede simplificarse, empleando el hecho que $(I_t^{p_i} = 100(p_{i,t}/p_{i,t_0}))$, de la siguiente forma:

$$IL_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} p_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right) \quad (11)$$

Así, el denominador de este índice de precios corresponde al valor de la canasta en el período base, mientras que el numerador corresponde al precio de esa misma canasta a precios del período t . El índice de Laspeyres puede interpretarse entonces, **como la relación entre el valor de una canasta de bienes y servicios del período base a los precios del período t , y el valor pagado por los mismos artículos en el período base.**

El índice de precios de Laspeyres se utiliza en los casos donde es difícil obtener periódicamente las ponderaciones. Además, la sencillez de la fórmula, facilidad de comprensión, requerimientos de menos antecedentes, adaptación a gran número de problemas y menor costo en su empleo, explican la preferencia para su aplicación en la gran mayoría de los casos.

3.1.3. Índice de Paasche

El índice de Paasche emplea ponderaciones variables, que corresponden a la participación del gasto en cada uno de los bienes en el valor total de las cantidades que conformaban la canasta del período t pero ambos valorados a los precios del período

base t_0 . Así, cada periodo en que las cantidades de los artículos que conforman la canasta varíen, la ponderación asignada a cada uno de los artículos cambiará. Formalmente, las ponderaciones de éste índice corresponden a:

$$w_i = \frac{p_{i,t_0} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \quad (12)$$

Por lo tanto, el índice de Paasche con base en el período t_0 corresponderá a un promedio ponderado de los índices simples de precios para los i artículos que estaban presentes en la canasta del período t_0 . En otras palabras:

$$IP_t = \sum_{i=1}^n w_i I_t^{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{p_{i,t_0} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} I_t^{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t_0} Q_{i,t} I_t^{p_i}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \quad (13)$$

Recordando que $(I_t^{p_i} = 100(p_{i,t}/p_{i,t_0}))$, la expresión (13) puede simplificarse de la siguiente forma:

$$IP_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \right) \quad (14)$$

Ahora el numerador representa el valor de la canasta en el período actual, mientras que el denominador corresponde al valor que hubiera tenido la canasta actual en el período base t_0 .

Es importante anotar que en un sentido estricto, los elementos de una serie de índices de Paasche no son directamente comparables entre sí, pues sus componentes pueden cambiar. Lo anterior no es válido para una serie de índices de Laspeyres. Sin embargo, cualquiera de los índices de ambas series permite una comparación válida entre cada

período actual y la base. El índice de precios de Paasche puede interpretarse como: **la relación existente entre el valor en el periodo t de un grupo de bienes y servicios y el que resulta de valorar a los precios del período base la misma canasta correspondiente al período actual.**

Antes de continuar, es importante resaltar que para el cálculo de un índice de precios de tipo Paasche, es necesario contar con las cantidades que conforman la canasta de cada periodo, así como con los precios de cada período. También es importante mencionar que la fórmula de Paasche se ve afectada por las variaciones en las cantidades que se utilizan como ponderación. De tal forma que no es posible separar la influencia de las variaciones en las cantidades, de las variaciones en los precios. En la práctica, emplear un índice de este tipo para calcular el índice de precios al consumidor, por ejemplo, tendría un costo prohibitivo; pues sería preciso efectuar cada mes una encuesta de consumos, lo que es prácticamente imposible desde el punto de vista de costos, tiempo, personal, etc.

3.1.4. Índice de Fisher

Fisher propuso un índice de precios que recogía tanto al índice de Laspayres como el de Paasche, que corresponde a un promedio geométrico de estos dos últimos. Este índice, con base en el período t_0 se define de la siguiente forma:

$$IF_t = \sqrt{IP_t \cdot IL_t} = 100 \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} P_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)} \quad (15)$$

Este índice es poco empleado en la práctica, pues los requerimientos de información de este índice son los mismos que los del índice de Laspayres o Paasche. La ventaja de este índice es meramente teórica⁸.

⁸ Para ver una prueba de la ventajas teóricas del índice de Fisher frente a los de Laspayre y Paasche refiérase a D'Ottone (1991) página 176.

EJEMPLO 3-1 Cálculo de los Índices compuestos de precios de Sauerbeck, Laspeyres, Paasche y Fisher.

A partir de la siguiente información (ficticia) calcule los índices de precios de Sauerbeck, Laspeyres, Paasche y Fisher.

TABLA 3-1. Precios y Cantidades de una Canasta ficticia para 4 períodos.

Artículo	Periodo 0		Periodo 1		Periodo 2		Periodo 3	
	p_0	Q_0	p_1	Q_1	p_2	Q_2	p_3	Q_3
1	10	10	20	10	20	50	20	5
2	15	20	25	20	50	30	50	40
3	20	30	20	30	10	5	20	10

RESPUESTA:

Como se discutió el índice de Sauerbeck, viene dado por la siguiente fórmula:

$$IS_t = \sum_{i=1}^n w_i I_t^{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} I_t^{p_i} = \frac{\sum_{i=1}^n I_t^{p_i}}{n}$$

Donde el año base es el período 0 y $t = 0, 1, 2, 3$

Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 3-2 Cálculo del Índice de Sauerback.

(Periodo 0=100)

Artículo	Índice de precios simple			
	Periodo 0	Periodo 1	Periodo 2	Periodo 3
1	100.0	200.0	200.0	200.0
2	100.0	166.7	333.3	333.3
3	100.0	100.0	50.0	100.0
IS_t	100.0	155.6	194.4	211.1

De acuerdo a la siguiente fórmula $IL_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} P_{i,t}}{\sum_{j=1}^n P_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)$, donde $t = 0, 1, 2, 3$ y año base

= período 0, el índice de Laspeyres se calcula como se muestra a continuación:

EJEMPLO 3-1 Cálculo de los Índices compuestos de precios de Sauerbeck, Laspeyres, Paasche y Fisher. (Cont.)

Tabla 3-3 Cálculo del índice de Laspeyres

(Periodo 0=100)

Artículo	$p_0 Q_0$	$p_1 Q_0$	$p_2 Q_0$	$p_3 Q_0$
1	100	200	200	200
2	300	500	1000	1000
3	600	600	300	600
Valor de la canasta	1000	1300	1500	1800
	Periodo			
	1	2	3	4
IL_t	100	130	150	180

El índice de Paasche se halla utilizando la siguiente expresión $IP_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \right)$

donde t = 0,1,2,3 y año base = periodo 0. Los resultados se reportan en la TABLA 3-4.

Tabla 3-4 Cálculo del índice de Paasche

(Periodo 0=100)

Artículo	$p_0 Q_0$	$p_0 Q_1$	$p_0 Q_2$	$p_0 Q_3$
1	100	100	500	50
2	300	400	600	800
3	600	900	150	300
Valor de la canasta	1000	1400	1250	1150
	Periodo			
	1	2	3	4
IP_t	100	92.86	204	200

Por último, para encontrar el IF se utiliza la fórmula que se muestra a continuación:

$$IF_t = \sqrt{IP_t \cdot IL_t} = 100 \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} p_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)}$$

EJEMPLO 3-1 Cálculo de los Índices compuestos de precios de Sauerbeck, Laspeyres, Paasche y Fisher. (Cont.)

Por último, para encontrar el IF se utiliza la fórmula que se muestra a continuación:

$$IF_t = \sqrt{IP_t \cdot IL_t} = 100 \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} p_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)}$$

Tabla 3-5 Cálculo del índice de Fisher

(Periodo 0 = 100)

	<i>Periodo</i>			
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>IF_t</i>	100.0	96.4	174.9	189.7

3.2. Índices de Cantidades

Los índices compuestos de cantidades se pueden calcular siguiendo la misma lógica que los índices de precios compuestos estudiados en la sección anterior. Por ejemplo el índice de cantidades de Sauerback corresponderá a:

$$IQS_t = \frac{\sum_{i=1}^n I_t^{Q_i}}{n} \tag{16}$$

Por otro lado, los índices compuestos de cantidades de Laspeyres, Paasche y Fisher corresponden respectivamente a:

$$IQL_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t} p_{i,t_0}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right) \tag{17}$$

$$IQP_t = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t} Q_{j,t_0}} \right) \tag{18}$$

$$IQF_t = \sqrt{IQP_t \cdot IQL_t} = 100 \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_{i,t} Q_{i,t}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t} p_{i,t_0}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)} \quad (19)$$

4. Índices Compuestos por Varios Grupos

Numerosos índices, como el de precios al consumidor o el de precios al productor, se componen de varios grupos, los que a su vez, se subdividen una o más veces en subgrupos. De tal forma que para cada una de estas subdivisiones se calculan índices separados. El procedimiento seguido para obtener índices generales a partir de los parciales es simple. Inicialmente se calculan los índices de las divisiones menores. En seguida, se consideran los diversos índices que pertenecen al mismo grupo y se ponderan para obtener el índice general. Las ponderaciones se realizan por medio de coeficientes previamente establecidos que permanecerán constantes hasta que se realice una revisión de la base.

5. Operaciones para Manipular series de Índices

A continuación se discuten dos operaciones muy empleadas en la práctica cuando se trabajan con índices: el cambio de base y el empalme de índices.

5.1. Cambio de base de un índice

En algunas ocasiones será necesario cambiar de base los estimadores. Cuando se trata de índices simples, esta operación es muy sencilla pues simplemente corresponde a una regla de tres. En otras palabras, la operación de cambiar de base es equivalente a cambiar la base de nuestro índice. Supongamos que se cuenta con un índice cuya base es el período t_0 y se desea contar con un índice para la misma variable con base A . En este caso tendremos que:

$$I_t^{BASE A} = 100 \left(\frac{X_t}{X_A} \right) = 100 \left(\frac{X_t/X_{t_0}}{X_A/X_{t_0}} \right) = 100 \left(\frac{I_t^{BASE t_0}}{I_A^{BASE t_0}} \right) \quad (20)$$

Para entender la intuición detrás de la fórmula (20), se puede visualizar ésta como una regla de tres. Es decir, si en la escala inicial (cuando se emplea t_0 como base) el índice para el año t_A correspondía a $I_A^{BASE t_0}$, ahora con la nueva base este índice se transformará en 100. Por otro lado, tenemos que en la escala inicial (cuando se emplea t_0 como base) el índice para el año t correspondía a $I_t^{BASE t_0}$, la pregunta será: ¿a qué corresponde este valor en la nueva escala? Es decir, $I_A^{BASE t_0}$ es a 100 como $I_t^{BASE t_0}$ es a nuestro nuevo índice con base t_A . En otras palabras:

$$\frac{I_t^{BASE t_0}}{I_A^{BASE t_0}} = \frac{?}{100}$$

$$? = I_t^{BASE A} = 100 \left(\frac{I_t^{BASE t_0}}{I_A^{BASE t_0}} \right)$$

Regresando a la expresión (20), ésta se puede reescribir de la siguiente forma:

$$I_t^{BASE A} = I_t^{BASE t_0} \left(\frac{100}{I_A^{BASE t_0}} \right) = I_t^{BASE t_0} \kappa(A, t_0) \quad (21)$$

Donde $\kappa(A, t_0) = (100/I_A^{BASE t_0})$ y se denomina factor de escala. Así, basta con multiplicar cualquier elemento de la series de índices con base t_0 por el factor de escala para obtener el índice expresado en la nueva base.

EJEMPLO 5-1 Cambio de Base de un Índice

Continuando con el EJEMPLO 2-2, cambie la base del índice de precios de la mora en el municipio de Cali de tal forma que la nueva base sea el 2000.

RESPUESTA:

Como se discutió, el crecimiento porcentual anual del precio será:

$$I_t^{BASE 2000} = 100 \left(\frac{I_t^{BASE 1998}}{I_{2000}^{BASE 1998}} \right) = 100 \left(\frac{I_t^{BASE 1998}}{90} \right) = I_t^{BASE 1998} \left(\frac{100}{90} \right). \text{ Es decir, el factor de}$$

EJEMPLO 5-1 Cambio e Base de un Índice (Cont.)

escala corresponde a $1.1\bar{1}$. Los resultados del cálculo de este índice de precios se reportan en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

Tabla 5-1. Índice de Precios de la Mora en el Municipio de Cali
(1996 – 2001)

Año	Índice de precios (1998=100)	Índice de precios (2000=100)
1996	36	40.0
1997	44.67	49.6
1998	100	111.1
1999	80	88.9
2000	90	100.0
2001	100	111.1

Fuente: Cálculos Propios

En relación con los índices compuestos, es importante resaltar que si bien el procedimiento anteriormente descrito cambia la escala del índice, empleando un nuevo año como referencia⁹, las ponderaciones empleadas en el cálculo del índice se mantienen intactas. Por ejemplo, supongamos un índice de precios tipo Laspeyres con base en el período t_0 para dos periodos: A y B . Suponga que queremos convertir el índice del periodo B a la base A . Empleando la expresión (20), obtenemos:

$$I_B^{BASE A} = 100 \left(\frac{I_B^{BASE t_0}}{I_A^{BASE t_0}} \right) = 100 \left(\frac{100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} p_{i,B}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)}{100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} p_{i,A}}{\sum_{j=1}^n p_{j,t_0} Q_{j,t_0}} \right)} \right)$$

⁹ Es importante diferenciar el periodo base del periodo referencia cuando hablamos de índices compuestos tipo Laspeyres. En este caso, el periodo base corresponde a aquel para el cual se establecen las ponderaciones. Por otro lado, el periodo referencia corresponde al periodo en el que el índice es igual a 100. Es decir, el período que sirve de “referencia” para comparar los otros.

Manipulando algebraicamente la anterior expresión, obtenemos:

$$I_B^{BASE A} = 100 \left(\frac{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} P_{i,B}}{\sum_{i=1}^n Q_{i,t_0} P_{i,A}} \right)$$

Es decir, se obtendrá un índice que estrictamente no ha cambiado de base, pues las ponderaciones de la base original se mantienen, pero el período de referencia a cambiado al período A , de tal forma que el nuevo índice será igual a 100 para el período de referencia.

5.2. Empalme de dos series de índices

En numerosas ocasiones es preciso calcular un nuevo índice con el objeto de reemplazar a uno que se encuentra obsoleto. Naturalmente, el antiguo índice se abandona y sólo se continúa la publicación del nuevo. Se presenta entonces un problema cuando se desea estudiar la variación de algún fenómeno, entre fechas cubiertas por uno u otro índice separadamente. Si esto sucede, es necesario efectuar un “empalme” de ambas series, para lo cual se precisa calcular índices con la nueva y antigua base que cubran un mismo lapso (años o meses) y establecer así un período común de enlace.

Para ello, es necesario contar por lo menos con un período común para las dos series de índices. Si esta condición se cumple, se puede emplear un factor de escala que permita el empalme de las dos series. El factor de escala, para empalmar la serie y mantener el período base (o período referencia en el caso de un índice compuesto) corresponderá a:

$$K = \frac{I_{\text{período común}}^{\text{Nuevo}}}{I_{\text{período común}}^{\text{Antiguo}}} \quad (22)$$

Así, para obtener la serie empalmada que conserve la base del nuevo índice simplemente se necesita multiplicar la serie de índices antigua por el factor de

conversión. Noten que este procedimiento implica, al igual que el cambio de base, una regla de tres.

En caso que se desee que la serie empalmada continúe con la base de la nueva serie, el factor de escala pertinente será el inverso al presentado en (22). Es decir, el factor de

escala será $I_{\text{periodo común}}^{\text{Antiguo}} / I_{\text{periodo común}}^{\text{Nuevo}}$.

Es importante destacar que al efectuar un empalme se supone que ambos índices son comparables. En la práctica no ocurre esto, ya que al momento de calcular un nuevo índice se espera que se emplee nuevas fuentes de información o métodos para calcular el índice.

EJEMPLO 5-2. Empalme de un Índice

A partir de la información presentada en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.2**, empalme las dos series, primero creando una serie con base igual a la serie nueva y posteriormente conservando la base de la serie antigua.

TABLA 5-2. Índice de Precios (datos ficticios)

(Ene-03 –Mar-04)

Período	Índice Antiguo	Índice Nuevo
	Feb.99=100	Aug.03=100
Jan-03	200.0	
Feb-03	210.0	
Mar-03	220.0	
Apr-03	300.0	
May-03	320.0	
Jun-03	330.0	
Jul-03	350.0	
Aug-03	400.0	100.0
Sep-03		105.0
Oct-03		120.0
Nov-03		115.0
Dec-03		130.0
Jan-04		132.0
Feb-04		145.0
Mar-04		150.0

EJEMPLO 5-2. Empalme de un Índice (Cont.)**RESPUESTA:**

Como se discutió, para empalmar la serie manteniendo la base de la nueva serie

corresponde a: $\kappa = \frac{I_{Ago-03}^{Nuevo}}{I_{Ago-03}^{Antiguo}} = \frac{100}{400} = \frac{1}{4} = .25$. Entonces, para empalmar la serie basta

multiplicar los elementos de la serie antigua por .25. Los resultados se reportan en la columna 4 de la TABLA 5-2.

Por otro lado, para empalmar la serie conservando la base de la serie antigua, se

emplea el siguiente factor de conversión: $\kappa = \frac{I_{Ago-03}^{Nuevo}}{I_{Ago-03}^{Antiguo}} = \frac{400}{100} = 4$. Entonces, para

empalmar la serie basta multiplicar los elementos de la nueva serie por 4. Los resultados se reportan en la columna 5 de la TABLA 5-3.

TABLA 5-3. Índice de Precios Empalmados (datos ficticios)

(Ene-03 –Mar-04)

Período	Índice Antiguo	Índice Nuevo	Índice	Índice
	Feb.99=100	Aug.03=100	Empalmado Aug.03=100	Empalmado Feb.99=100
Jan-03	200.0		50.0	200.0
Feb-03	210.0		52.5	210.0
Mar-03	220.0		55.0	220.0
Apr-03	300.0		75.0	300.0
May-03	320.0		80.0	320.0
Jun-03	330.0		82.5	330.0
Jul-03	350.0		87.5	350.0
Aug-03	400.0	100.0	100.0	400.0
Sep-03		105.0	105.0	420.0
Oct-03		120.0	120.0	480.0
Nov-03		115.0	115.0	460.0
Dec-03		130.0	130.0	520.0
Jan-04		132.0	132.0	528.0
Feb-04		145.0	145.0	580.0
Mar-04		150.0	150.0	600.0

Fuente: Cálculos Propios

6. Referencias

- D'Ottone, Horacio. 1991. *Estadística. Teoría y Problemas Resueltos*. Santiago - Chile: Coopecultura.
- Fisher, Irving. 1927. *The Making of Index Numbers*. Boston: Houghton Mifflin Co.
- Lora, Eduardo. 1987. *Técnicas de Medición Económica. Metodología y aplicaciones en Colombia*. Bogota: Siglo veintiuno editores Ltda., Fedesarrollo.