

Una aproximación topológica al diseño modular en ingeniería de software

Luis Eduardo Múnera Salazar

Universidad Icesi, Cali-Colombia
lemunera@icesi.edu.co

Fecha de recepción: 5-5-2003

Fecha de aceptación: 22-8-2003

RESUMEN

Dada la gran importancia que ha tomado el paradigma orientado a objetos en la ingeniería de software y al papel central que juega la reusabilidad dentro de éste, se hacen necesarias la precisión y formalización de conceptos claves como cohesión, acoplamiento y modularidad.

En este trabajo se propone una formalización matemática de esos conceptos claves basada en la topología algebraica y que nos conduce a unos criterios formales de diseño modular que facilitan la medición de los conceptos.

PALABRAS CLAVES

Ingeniería de software, diseño orientado a objetos, cohesión, acoplamiento, modularidad.

ABSTRACT

By knowing the great importance taken by the questioning towards Software Engineering and the central part that reusability plays in this, precision and formalization become key concepts such as cohesion, coupling and modularity.

This work proposes a mathematical formalization of these key concepts on algebraic topology and take us through formal modular design and facilitates concept measuring.

KEY WORDS

Software engineering, object oriented design, cohesion, coupling, modularity.

Clasificación: A

INTRODUCCIÓN

Cohesión, acoplamiento, modularidad son términos frecuentemente utilizados en sistemas de información e ingeniería de software tanto dentro del Paradigma Estructurado como en el Paradigma Orientado a Objetos. Pero a pesar de su importancia no son precisados de manera formal y se suelen definir informalmente en términos como: “la cohesión en ingeniería de software designa un mecanismo para mantener juntas cosas relacionadas”,¹ “En la perspectiva del diseño orientado a objetos, la cohesión es una medida de cuán relacionadas y enfocadas están las responsabilidades de una clase”,² “El acoplamiento designa la interacción entre objetos que no están relacionados a través de herencia”,¹ “El acoplamiento es una medida de fuerza con que una clase está conectada a otras clases”² “intuitivamente el acoplamiento se refiere al grado de interdependencia entre partes de un diseño, mientras que la cohesión se refiere a la consistencia interna dentro de las partes del diseño”,³ etc.

Esta labor está motivada por la ausencia de formalidad en esos conceptos y por la necesidad de contar con métricas que permitan medir cohesión y acoplamiento. A estos respectos se han hecho algunos esfuerzos como una propuesta de formalización basada en la filosofía y más concretamente en la Ontología de Bunge⁴ a partir de la cual se han desarrollado algunas métricas y criterios de evaluación.³

El objetivo es caracterizar formalmente los conceptos mencionados anteriormente, mediante el uso de la Topología Algebraica, una rama de la

matemática. A partir de esta caracterización se proponen formas naturales para medir la cohesión y el acoplamiento.

Alcanzar un diseño modular que facilite la reusabilidad es un objetivo mayor que se busca actualmente en el Paradigma Orientado a Objetos y que va ligado a los criterios de alta cohesión y bajo acoplamiento, que son de uso recurrente en propuestas actuales como la del Lenguaje Unificado de Modelamiento (UML) de Booch, Rumbaugh y Jacobson.⁵ A ese respecto este trabajo permite formalizar matemáticamente lo que se entendería por un diseño modular, precisarlo, y sobre todo cómo lograrlo.

Este artículo está organizado de la siguiente manera: La sección I está dedicada a los fundamentos matemáticos que comprenden principalmente las nociones básicas de topología algebraica que son necesarias. La sección II está dedicada a caracterizar formalmente las nociones de cohesión, acoplamiento, modularidad y a proponer métricas asociadas a la cohesión y el acoplamiento. También se propone un algoritmo que permite realizar un diseño modular. La sección III está dedicada a desarrollar una aplicación concreta, que consiste en mostrar cómo realizar un diseño modular que es un empaquetamiento de clases partiendo de un modelo de conceptos.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS

Un complejo simplicial abstracto K sobre un conjunto finito cuyos elementos se llaman vértices $V = \{a_0, \dots, a_n\}$ es un subconjunto no vacío de partes de V (excluyendo el vacío)

cuyos elementos son llamados **símplices** con las siguientes propiedades:

(P1) Si $\sigma \in K$ y $\tau \subset \sigma$ entonces $\tau \in K$. Decimos que σ y τ son **símplices** y que τ es una **cara** de σ .

(P2) Si σ y τ pertenecen a K , entonces $\sigma \cap \tau$ o bien es vacía, o bien es una cara común de σ y τ .

(P3) Si a_i pertenece a V entonces $\{a_i\}$ pertenece a K .

La **dimensión** de un **símplice** es el número de sus **vértices** menos uno. La **dimensión** de K es el máximo de las **dimensiones** de todos sus **símplices**.

A cada **complejo simplicial abstracto** le podemos asociar un **complejo simplicial geométrico** y viceversa. El pro-

cedimiento es sencillamente asociar a cada **símplice** de **dimensión** n (n -**símplice**) del **complejo abstracto** un **símplice geométrico** que es una **generalización** a " n " **dimensiones** de **espacios geométricos** muy conocidos como **segmentos**, **triángulos**, **tetraedros**, etc.

De esta manera un **0-símplice** es un **punto**, un **1-símplice** es una **línea de segmento**, un **2-símplice** es una **región triangular**, un **3-símplice** es un **tetraedro sólido**, etc. En general podemos decir que si $\{a_0, \dots, a_n\}$ es un **conjunto de puntos independientes** en R^m , entonces el n - **símplice geométrico** σ_n generado por $\{a_0, \dots, a_n\}$ es el **conjunto de todos los puntos** de R^m , x , tales que,

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i, \text{ donde } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i > 0, \forall_i$$

Los puntos a_0, a_1, \dots, a_n son llamados los **vértices** de σ_n .

Los números t_i , son llamados las **coordenadas baricéntricas** del punto x de σ_n con respecto a $\{a_0, \dots, a_n\}$.

El número n de σ_n es llamado la **dimensión** de σ_n . El **subespacio** de σ_n generado por un **subconjunto** de los **vértices** $\{a_0, \dots, a_n\}$ de σ_n se denomina una **cara** de σ_n .

La **realización geométrica** de un **complejo simplicial abstracto** K , es un **poliedro** que denotaremos por $\langle K \rangle$.

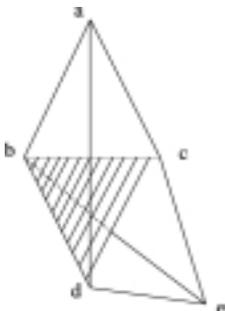
Un **teorema** conocido en **topología algebraica**,⁹ prueba que es **seguro** que un **complejo simplicial abstracto** de

dimensión n tiene una **realización geométrica** en R^{2n+1} . Aunque muchas veces la **realización** puede ser en **espacios euclidianos** de **dimensión** menor a $(2n+1)$.

La **dualidad** entre **complejos abstractos** y **geométricos** nos da la **flexibilidad** suficiente para **representar** inicialmente un **complejo abstracto** que surge de **relaciones abstractas** mediante una **matriz de incidencia** y poderlo **interpretar geoméricamente** y **representarlo gráficamente** después. Sin perder la **posibilidad** de **trabajar** en **espacios multidimensionales** donde no es posible una **representación gráfica**.

Ejemplo 1:

Consideremos un complejo geométrico en \mathbb{R}^3 , cuya representación está dada por la figura:



Asociado a este complejo geométrico tenemos un complejo simplicial abstracto, definido como:

$K = \{\sigma_0^i\} \cup \{\sigma_1^j\} \cup \{\sigma_2^k\}$ con $i = 1, \dots, 5$, $j = 1, \dots, 9$, $k = 1$, en donde:

$\sigma_2^1 = \{b, c, d\}$, $\sigma_1^1 = \{a, b\}$, $\sigma_1^2 = \{a, c\}$, $\sigma_1^3 = \{b, c\}$, $\sigma_1^4 = \{b, d\}$, $\sigma_1^5 = \{b, e\}$, $\sigma_1^6 = \{a, d\}$, $\sigma_1^7 = \{c, d\}$, $\sigma_1^8 = \{c, e\}$, $\sigma_1^9 = \{d, e\}$, $\sigma_0^1 = \{a\}$, $\sigma_0^2 = \{b\}$, $\sigma_0^3 = \{c\}$, $\sigma_0^4 = \{d\}$, $\sigma_0^5 = \{e\}$.

Una representación mediante una matriz de incidencia puede ser:

MI	a	b	c	d	e
σ_2^1	0	1	1	1	0
σ_1^1	1	1	0	0	0
σ_1^2	1	0	1	0	0
σ_1^5	0	1	0	0	1
σ_1^6	1	0	0	1	0
σ_1^8	0	0	1	0	1
σ_1^9	0	0	0	1	1

Las columnas son etiquetadas por los vértices, y las filas por los símlices. No hay necesidad de incluir filas correspondientes a los símlices que son caras.

A un complejo simplicial K le podemos asociar arreglos numéricos que son invariantes topológicos (todos los poliedros equivalentes topológicamente poseen los mismos arreglos). El primero de ellos se conoce con el nombre de primer vector de estructura del complejo y permite ver la conectividad interna del complejo (visión local) recurriendo a la noción de q -conectividad. Esta noción y sus aplicaciones en ciencias sociales fueron desarrolladas por el matemático Ronald Atkin.^{7,8}

Dados dos símlices de un complejo K , σ_p y σ_r . Decimos que σ_p y σ_r son “ q -adyacentes” si existe al menos una cara común entre ellos que es un q -símlice. Obviamente si σ_p y σ_r son q -adyacentes entonces son $q-1$, $q-2, \dots, 1, 0$ adyacentes.

Sea δ_q la relación definida como “es q -adyacente con”. Dicha relación es reflexiva y simétrica pero no transitiva. La representaremos por una matriz cuadrada de $N \times N$, siendo N el número de símlices de K de dimensión $\geq q$ y que no son caras de otros símlices en K .

Asociado a un complejo K tendremos $m+1$ matrices de q -adyacencia, siendo m la dimensión de K .

Dados dos símlices de un complejo K , σ_p y σ_r . Decimos que σ_p y σ_r están “ q -conectados” si σ_p y σ_r son q -adyacentes o si existe una secuencia de símlices en K , $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tal que σ_p es q -adyacente a σ_1 , σ_1 es q -adyacente a

σ_2 y así sucesivamente hasta llegar a que σ_n es q-adyacente a σ_r . Si σ_p y σ_r son q-conectados entonces ellos también son $(q-1), \dots, 1, 0$ -conectados en K.

Si definimos la relación γ_q como significando “es q-conectado con” entonces γ_q es una relación de equivalencia sobre los símlices de K. Las clases de K/γ_q son ahora las piezas de K las cuales son separadamente q-conectadas.

La relación γ_q puede ser representada por una matriz cuadrada de $N \times N$ que denominamos matriz de “q-conexión”. La matriz de q-conexión se obtiene a partir de la matriz de q-adyacencia, mediante un cierre transitivo.

Los “unos” de la matriz de q-conexión, determinan las clases de equivalencia de K/γ_q que son ahora las piezas de K que son separadamente q-conectadas. Q_q es la cardinalidad de K/γ_q .

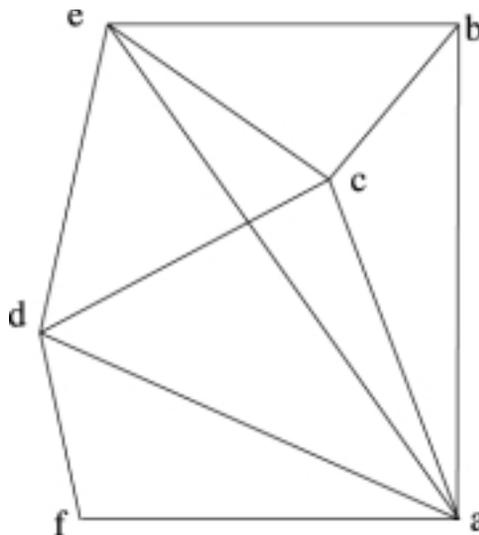
Si K es un complejo finito no vacío de dimensión n, le podemos asociar el arreglo $Q = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_n \rangle$ en donde Q_i es la cardinalidad de K/γ_i , siendo $Q_i \geq 1, \forall i = 0, 1, \dots, n$

Las clases de Q_0 son las componentes arco-conexas del complejo.

Ejemplo 2: Consideremos un complejo finito K cuyos vértices son a, b, c, d, e, f y cuyos símlices vienen dados por la matriz de incidencia:

MI	a	b	c	d	e	f
σ_1^1	1	1	0	0	0	0
σ_2^1	0	0	1	1	1	0
σ_2^2	0	1	1	0	1	0
σ_2^3	1	0	1	0	1	0
σ_2^4	1	0	0	1	0	1

La representación geométrica del complejo es:



Las Matrices de Conexión asociadas son:

θ	σ_1^1	σ_2^1	σ_2^2	σ_2^3	σ_2^4	1	σ_1^1	σ_2^1	σ_2^2	σ_2^3	σ_2^4	2	σ_2^1	σ_2^2	σ_2^3	σ_2^4
σ_1^1	1	1	1	1	1	σ_1^1	1	0	0	0	0	σ_2^1	1	0	0	0
σ_2^1	1	1	1	1	1	σ_2^1	0	1	1	1	0	σ_2^2	0	1	0	0
σ_2^2	1	1	1	1	1	σ_2^2	0	1	1	1	0	σ_2^3	0	0	1	0
σ_2^3	1	1	1	1	1	σ_2^3	0	1	1	1	0	σ_2^4	0	0	0	1
σ_2^4	1	1	1	1	1	σ_2^4	0	0	0	0	1					

Por lo tanto $\mathbf{Q} = \langle 1, 3, 4 \rangle$.

El segundo invariante topológico permite tener una visión global del complejo, calculando los “agujeros” que el poliedro posee en distintas dimensiones.

De esta manera a un complejo simplicial K de dimensión n le podemos asociar un arreglo $\beta = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \rangle$ en donde β_i es el correspondiente número de Betti para cada dimensión i con i desde 0 hasta n .

$\beta_0 = Q_0$, que se define como el número de componentes arco-conexas β_1 es el número de “túneles” linealmente independientes (que llamaremos 2-agujeros), β_2 es el número de agujeros de dimensión 3 (que llamaremos 3-agujeros) del complejo; en general, β_i es el número de agujeros de dimensión $i+1$ ($i+1$ -agujeros) del complejo.

En [6] se presenta un criterio simple para calcular números de Betti sencillamente como:

$$\beta_p(K) = n_p - \text{rango } \partial_p - \text{rango } \partial_{p+1}$$

En donde n_p es el número de simpllices de dimensión p del complejo K y $\partial_p, \partial_{p+1}$ son matrices de frontera que

relacionan simpllices de dimensión p y $p-1$, y $p+1$ y p respectivamente.

Volviendo al complejo del ejemplo 2, su respectivo poliedro posee dos agujeros bidimensionales (túneles) el primero formado por aeb y abc , el segundo formado por aed y adc . Por lo tanto $\beta = \langle 1, 2, 0 \rangle$.

Dado un complejo $K = (V, S)$ en donde V es el conjunto de vértices y S es el conjunto de simpllices, le podemos asociar una topología τ_k .

En general dado un conjunto X diferente de \emptyset ; una familia τ de subconjuntos de X es una topología de X si y sólo si verifica los axiomas siguientes:

- A1) X y \emptyset pertenecen a τ
- A2) La unión de cualquier número de conjuntos de τ pertenece a τ .
- A3) La intersección de dos conjuntos cualesquiera de τ pertenece a τ .

En particular sobre el complejo $K = (V, S)$ podemos obtener la topología τ_k tomando como base $S \cup \{\emptyset\}$ simplemente incluyendo en τ_k todos los elementos de $S \cup \{\emptyset\}$ y de todas las posibles uniones de los elementos de S .

II. COHESIÓN, ACOPLAMIENTO Y MODULARIDAD

Es ampliamente conocida la conveniencia de descomponer un sistema en módulos, de tal manera que haya una alta cohesión dentro de los módulos y un bajo acoplamiento entre los módulos. Sin embargo, como se señaló en la parte I (Introducción) las nociones de cohesión y acoplamiento no se caracterizan formalmente y simplemente se apela a la intuición invocando expresiones como “fuerza”, “consistencia”, “agrupamiento”, etc.

La propuesta es caracterizar formalmente estas nociones a través de la topología valiéndonos de los invariantes topológicos Q y β definidos en la parte II (fundamentos matemáticos).

Inicialmente daremos algunas definiciones básicas de Sistema, Módulo y Descomposición modular que son generalizaciones o variantes de las dadas en.⁹ Posteriormente asociaremos a estos conceptos básicos complejos simpliciales que nos permitirán estudiar la cohesión y el acoplamiento desde un punto de vista estructural basados en la topología. Y finalmente proponer métricas que permitan medir la cohesión de un módulo y el acoplamiento entre módulos de una descomposición modular y más aún proponer un método para obtener descomposiciones modulares con alta cohesión intra-módulos y bajo acoplamiento inter-módulos.

Un Sistema S es un par $\langle E, R \rangle$ donde E se llama el conjunto de elementos de S y $R \subseteq P^*(E) \times E$ ($P^*(E) = P(E) - \{\emptyset\}$, siendo $P(E)$ el conjunto de partes de E) se denomina las interrelaciones entre elementos de S .

Que $(X, e) \in R$ lo denotamos por $X \rightarrow e$. Si $P^*(E) = E$ entonces R es una relación binaria sobre E .

Dado un sistema $S = \langle E, R \rangle$, un sistema $M = \langle E_M, R_M \rangle$ es un módulo de S si y sólo si $E_M \subseteq E$ y $R_M \subseteq R$.

Los elementos de un módulo son conectados a los elementos del resto del sistema por relaciones de entrada o aferentes y relaciones de salida o eferentes.

Los conjuntos de relaciones de entrada al módulo M y de salida del módulo M , los definimos respectivamente como,

$$I(M) = \{ X \rightarrow e \in R / e \in E_M \text{ y } X \in (P(E) - P(E_M)) \}$$

$$O(M) = \{ X \rightarrow e \in R / X \in P(E_M) \text{ y } e \in (E - E_M) \}$$

Dado un sistema $S = \langle E, R \rangle$ definimos una descomposición modular de S como un conjunto de módulos de S , $\rho = \{M_i\}_{i \in I}$, tal que cada elemento de E pertenece a E_{M_i} , para algún $M_i \in \rho$, y para cada par de módulos M_i y M_j de ρ estos son disjuntos, es decir, $E_{M_i} \cap E_{M_j} = \emptyset$ y $R_{M_i} \cap R_{M_j} = \emptyset$.

Una consecuencia de esta definición es que cada interrelación del sistema, o bien es una interrelación intramódulo, o bien es una interrelación de diferentes módulos. Formalmente, $\forall (X \rightarrow e) \in R$, o bien $X \rightarrow e \in R_{M_i}$, $\exists M_i \in \rho$, o bien $X \rightarrow e \in I(M_j)$, $\exists M_i \in \rho$ y $\exists M_j \in \rho$ con $M_i \neq M_j$.

Dado un sistema $S = \langle E, R \rangle$ le podemos asociar un complejo simplicial que denotaremos por K_S de la siguiente manera: Cada elemento e de E es un vértice del complejo y los simplices son los subconjuntos de E ,

$$X \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \{e_i\} \right), \text{ tales que } (X, e_i) \in R, \forall i = 1, \dots, k$$

La realización geométrica es el poliedro $\langle K_S \rangle$. En K_S cada símplice consta de X y todos sus vecinos más cercanos, es decir, todos los vértices e_i tales que $X \rightarrow e_i$.

Ahora estamos en condiciones de definir la cohesión de un sistema o módulo a partir del complejo simplicial asociado a él.

$$\text{Cohesión (M)} = \begin{cases} 1 & \text{Si } m=0 \text{ y } n_0 = 1 \\ \frac{\sum_{i=0}^m (n_i - Q_i)^2}{\sum_{i=0}^m (n_i - 1)^2} & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Sea M un módulo y sea K_M su complejo asociado. La cohesión de M se define a partir del arreglo $Q = \langle Q_0, Q_1, \dots, Q_m \rangle$ asociado a K_M que supondremos de dimensión "m" y se mide de la siguiente manera:

Donde n_i es el número de símplices de dimensión i de K_M . Esta función tiene como rango el intervalo $[0, 1]$. Si $\text{Cohesión (M)} = 0$ se llama Nula, y si $0 < \text{Cohesión (M)} < 1$ se llama Baja, y si $\text{Cohesión (M)} = 1$ se llama Alta.

Sea $S = \langle E, R \rangle$ un sistema y $\rho = \{M_i\}_{i \in I}$ una descomposición modular

de S . A ρ le podemos asociar un complejo simplicial que denotaremos por K_ρ de la siguiente manera: Cada módulo M_i de ρ es un vértice del complejo y los símplices son los subconjuntos de ρ ,

$$\{M\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k \{M_i\} \right), \text{ tales que } (\exists X) \in P(E_M) \text{ y } (\exists e_i) \in E_{M_i} \text{ y } (X \rightarrow e_i) \in O(M)$$

$$\text{y } (X \rightarrow e_i) \in I(M_i), \forall i = 1, \dots, k$$

La realización geométrica es el poliedro $\langle K\rho \rangle$. En $K\rho$ cada símplice consta de un módulo M y de todos los módulos que son adyacentes a él a través de interrelaciones que salen de M y entran en estos módulos pero teniendo el mismo conjunto de elementos de M como salida.

Ahora estamos en condiciones de definir el acoplamiento de la descompo-

sición modular de un sistema a partir del complejo asociado a la descomposición.

Sea $\rho = \{M_i\}_{i \in I}$ una descomposición modular de un sistema y sea $K\rho$ su complejo asociado. El acoplamiento de ρ se define a partir del arreglo $\beta = \langle \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_m \rangle$ asociado a $K\rho$ que supondremos de dimensión "m" y se mide de la siguiente manera:

$$\text{Acoplamiento } (\rho) = \begin{cases} -1 & \text{Si } m = 0 \text{ y } n_0 = 1 \\ \frac{m}{\sum_{i=1}^m (n_i - \beta_i)^2} & \\ \{1 - \beta_0\} - \frac{m}{\sum_{i=1}^m n_i^2} & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

En donde n_i es el número de símplices de dimensión i de $K\rho$. Esta función tiene como rango el intervalo $[-(n_0 - 1), 0)$. Si $\text{Acoplamiento } (\rho) = -1$ se llama Bajo, y si $-1 < \text{Acoplamiento } (\rho) < 0$ se llama Alto, y si $-(n_0 - 1) < = \text{Acoplamiento } (\rho) < -1$ se llama Nulo.

Dado un sistema $S = \langle E, R \rangle$ surge la pregunta natural de cómo obtener una Descomposición Modular de él de tal manera que la cohesión intra-módulos sea Alta y el acoplamiento Inter.-módulos sea Bajo. En respuesta a esta pregunta se propone un algoritmo que permite obtenerla, partiendo del complejo asociado al sistema y que denominaremos Diseño Modular.

Entrada: La Matriz de Incidencia (MI) del Complejo de S .

Salida: $\rho = \{M_1, \dots, M_n\}$ una Descomposición o Diseño Modular del sistema S .

Método:

Paso 1:

Reducir o colapsar la matriz de incidencia

Sobre la matriz de incidencia podemos realizar tres tipos de operaciones de reducción:

O1) Columnas con un solo "1", el "1" se convierte en "0".

O2) Filas cuyos unos estén incluidos en los unos de otra fila, se convierten en ceros.

O3) Columnas cuyos unos estén incluidos en los unos de otra columna se convierten en ceros.

Paso 2:

Si la matriz resultante del paso anterior (matriz reducida) contiene unos, entonces hacer:

- 1) Determinar los agujeros asociados al complejo simplicial.
- 2) Generamos los símlices que permiten eliminar los agujeros. Esto significa agregar símlices en las Matrices de Incidencia y Reducida, lográndose finalmente la reducción total de la matriz de Incidencia.

Paso 3:

Cada símlice maximal de la matriz de incidencia (incluyendo los que se agregaron en el paso 2 para "rellenar" los agujeros) determina un módulo. Sean M_1^*, \dots, M_n^* los módulos obtenidos.

Paso 4:

Los módulos obtenidos anteriormente comparten fronteras (caras) y por lo tanto no son disjuntos. Así que debemos decidir qué módulo se queda con las fronteras para obtener finalmente la descomposición modular $\rho = \{M_1, \dots, M_n\}$ en donde los módulos M_1, \dots, M_n son disjuntos.

Este algoritmo garantiza una descomposición modular en la que cada módulo tiene cohesión 1 y el acoplamiento de ρ es cero. La cohesión se garantiza porque cada módulo procede de un símlice y el acoplamiento Bajo se garantiza por la eliminación de agujeros en el paso 2.

Es muy importante investigar si entre los complejos K_S y K_ρ existe una relación formal que garantice por ejemplo que la descomposición de K_S sea reversible y que haya unicidad de asignación de símlices de un complejo al otro y viceversa. Para ello consideremos τ_{KS} y $\tau_{K\rho}$ que son las topologías asociadas a K_S y K_ρ respectivamente. Podemos demostrar for-

malmente que entre τ_{KS} y $\tau_{K\rho}$ existe una Conexión de Galois.

En general una Conexión de Galois involucra dos conjuntos parcialmente ordenados (A, \leq_A) y (B, \leq_B) y dos funciones $F : A \rightarrow B$ y $G : B \rightarrow A$. Esas cuatro componentes juntas forman una Conexión de Galois si y sólo si $\forall x \in A, \forall x \in B$ se cumple:

$$F(x) \leq_B y \Leftrightarrow x \leq_A G(y)$$

En nuestro caso particular τ_{KS} y $\tau_{K\rho}$ son conjuntos parcialmente ordenados por la inclusión de conjuntos, (τ_{KS}, \subseteq_S) y $(\tau_{K\rho}, \subseteq_\rho)$.

Sean $F : (\tau_{KS}, \subseteq_S) \rightarrow (\tau_{K\rho}, \subseteq_\rho)$ y $G : (\tau_{K\rho}, \subseteq_\rho) \rightarrow (\tau_{KS}, \subseteq_S)$ definidas como:

$F(X) = Z$ si $Z = \{M_i\}$ con $i = 1, \dots, n$, siendo z el menor conjunto de módulos de ρ que recubre a X , v.gr.

$$X \subseteq_S \bigcup_{i=1}^n M_i$$

$G(Z) = W$ si $Z = \{M_j\}$ con $j = 1, \dots, m$,

$$\text{siendo } W = \bigcup_{j=1}^m M_j$$

Lema : Si $X \subseteq_S Y$ entonces $F(X) \subseteq_\rho F(Y)$.

D/: Sean $F(X) = \{M_i\}$ con $i = 1, \dots, n$ y $F(Y) = \{M_j\}$ con $j = 1, \dots, m$. Supongamos que $X \subseteq_S Y$ y $F(X) \subseteq_\rho F(Y)$. Entonces existe un módulo $M_k \in \{M_i\}$ con $i = 1, \dots, n$ tal que $M_k \in \{M_j\}$ con $j = 1, \dots, m$.

Dado que $\{M_i\}$ con $i = 1, \dots, n$ es el conjunto mínimo de módulos de ρ tales que

$$X \subseteq_s \bigcup_{i=1}^n M_i \text{ entonces } X \not\subseteq_s \bigcup_{j=1}^m M_j . \text{ Pero como } X \subseteq_s Y \text{ y } Y \subseteq_s \bigcup_{j=1}^m M_j \text{ entonces } X \subseteq_s \bigcup_{j=1}^m M_j$$

con lo cual obtenemos una contradicción. Por lo tanto, Si $X \subseteq_s Y$ entonces $F(X) \subseteq_\rho F(Y)$.

Teorema : $(\forall X \in \tau_{KS})(\forall Y \in \tau_{K\rho}) , F(X) \subseteq_\rho Y \Leftrightarrow X \subseteq_s G(Y)$.

D \Rightarrow /: Como $F(X)$ es el menor conjunto de módulos de ρ que recubre a X , entonces si $F(X) \subseteq_\rho Y$, $Y = \{M_j\}$ con $j = 1, \dots, m$ es un recubrimiento de X , es decir,

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^m M_j . \text{ Pero por definición de } G , G(Y) = \bigcup_{j=1}^m M_j . \text{ Por lo tanto , } X \subseteq_s G(Y)$$

D \Leftarrow /: Si $X \subseteq_s G(Y)$ entonces $X \subseteq_s \bigcup_{j=1}^m M_j$ siendo $Y = \{M_j\}$ con $j = 1, \dots, m$. Por el Lema,

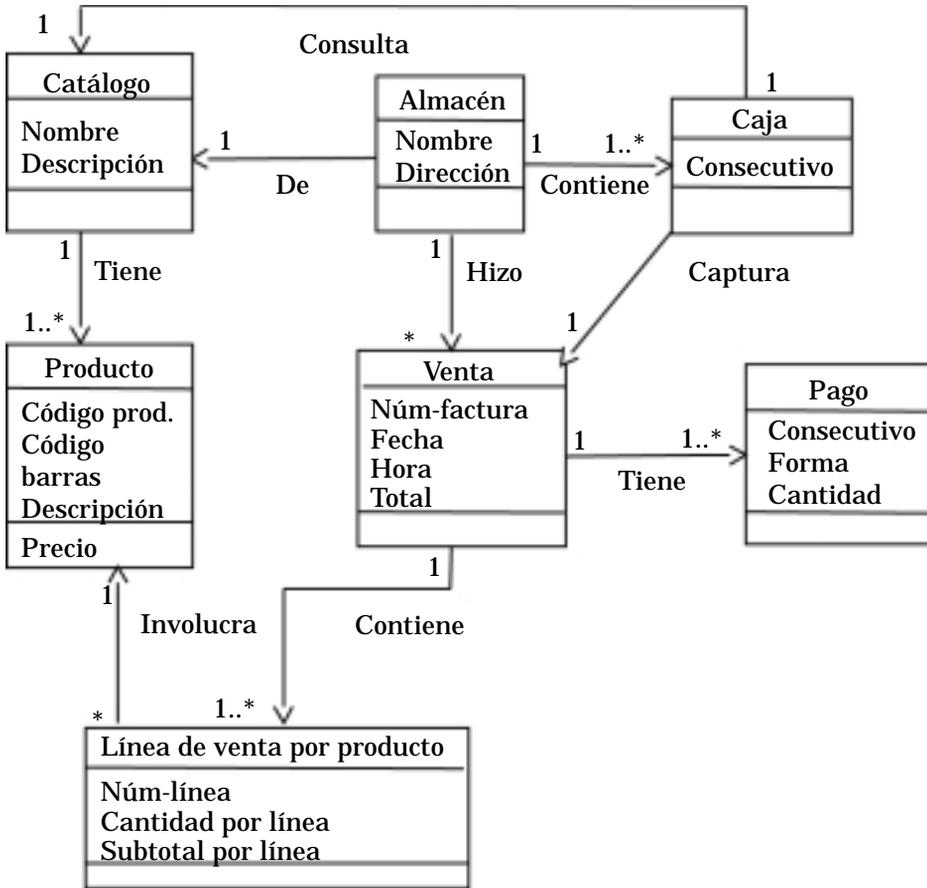
$$F(X) \subseteq_\rho F(\bigcup_{j=1}^m M_j) . \text{ Dado que los módulos son disjuntos entonces } F(\bigcup_{j=1}^m M_j) = \{M_j\} \text{ con } j = 1, \dots, m .$$

Por lo tanto $F(X) \subseteq_\rho Y$.

III. APLICACIONES

Para ilustrar el proceso consideremos un diagrama de clases dirigido (con flechas que indican la navegabilidad)

y en el que omitimos los métodos. Como ejemplo tomemos el siguiente diagrama de clases adaptado de:²



Sea A=Almacén, C=Catálogo, J=Caja, V=Venta, P=Producto, G=Pago, L=Línea de Venta por Producto.

Los elementos del sistema son las clases del diagrama, $E = \{A, C, J, V, P, L, G\}$ y las interrelaciones del sistema son las relaciones uno a uno entre las clases, $R = \{A \rightarrow C, C \rightarrow A, C \rightarrow J, J \rightarrow A, J \rightarrow V, J \rightarrow C, V \rightarrow J, V \rightarrow A, P \rightarrow C, G \rightarrow V, L \rightarrow P, L \rightarrow V\}$.

La matriz de incidencia del complejo de vecindad asociado es:

MI	A	C	J	V	P	L	G
S1	1	1	0	0	0	0	0
S2	1	1	1	0	0	0	0
S3	1	1	1	1	0	0	0
S4	1	0	1	1	0	0	0
S5	0	1	0	0	1	0	0
S6	0	0	0	1	0	0	1
S7	0	0	0	1	1	1	0

La matriz reducida es:

MR	C	V	P
S3	1	1	0
S5	1	0	1
S7	0	1	1

Existe un agujero bidimensional CVP. Lo podemos “rellenar” agregando el s3mplice S8 con unos en CVP.

Los m3dulos (s3mplices maximales) que obtenemos son:

M1 = B3sico , $E_{M1} = \{A, J, C, V\}$, $R_{M1} = \{A \rightarrow C, C \rightarrow A, C \rightarrow J, J \rightarrow A, J \rightarrow V, J \rightarrow C, V \rightarrow J, V \rightarrow A\}$. M2 = Productos , $E_{M2} = \{P, C, V\}$, $R_{M2} = \{P \rightarrow C\}$. M3 = Ventas , $E_{M3} = \{P, L, V\}$, $R_{M3} = \{L \rightarrow P, L \rightarrow V\}$. M4 = Pagos , $E_{M4} = \{V, G\}$, $R_{M4} = \{G \rightarrow V\}$.

Cohesi3n (M1) = Cohesi3n (M2) = Cohesi3n (M4) = 1 ; Cohesi3n (M3) = 0.8

$I(M1) = \{P \rightarrow C, G \rightarrow V, L \rightarrow V\}$, $O(M1) = \{A \rightarrow C, J \rightarrow C, J \rightarrow V\}$

$I(M2) = \{A \rightarrow C, J \rightarrow C, J \rightarrow V, L \rightarrow P, L \rightarrow V, G \rightarrow V\}$, $O(M2) = \{V \rightarrow J, V \rightarrow A, C \rightarrow A, P \rightarrow C\}$

$I(M3) = \{J \rightarrow V, G \rightarrow V\}$, $O(M3) = \{L \rightarrow P, L \rightarrow V, P \rightarrow C\}$

$I(M4) = \{J \rightarrow V, L \rightarrow V\}$, $O(M4) = \{V \rightarrow J, V \rightarrow A, G \rightarrow V\}$.

Tenemos interrelaciones como por ejemplo $A \rightarrow C$ que pertenecen tanto a R_{M1} como a $O(M1)$. Esto pone de manifiesto que todavía no tenemos la descomposición modular y se hace

necesario definir qué módulos se quedan con las fronteras.

Una propuesta de diseño final en la que los módulos son paquetes es la siguiente:

$\rho = \{ P1, P2, P3, P4 \}$ con $P1 = \text{Básico}$, $E_{P1} = \{ J, A \}$, $R_{P1} = \{ J \rightarrow A \}$; $P2 = \text{Productos}$, $E_{P2} = \{ P, C \}$, $R_{P2} = \{ P \rightarrow C \}$; $P3 = \text{Ventas}$, $E_{P3} = \{ L, V \}$, $R_{P3} = \{ L \rightarrow V \}$; $P4 = \text{Pagos}$, $E_{P4} = \{ G \}$, $R_{P4} = \emptyset$.

Cohesión (P1) = Cohesión (P2) = Cohesión (P3) = Cohesión (P4) = 1.

$I(P1) = \{ V \rightarrow J, V \rightarrow A, C \rightarrow A, C \rightarrow J \}$, $O(P1) = \{ A \rightarrow C, J \rightarrow C, J \rightarrow V \}$

$I(P2) = \{ A \rightarrow C, J \rightarrow C, L \rightarrow P \}$, $O(P2) = \{ C \rightarrow A, C \rightarrow J \}$

$I(P3) = \{ J \rightarrow V, G \rightarrow V \}$, $O(P3) = \{ V \rightarrow J, V \rightarrow A, L \rightarrow P \}$

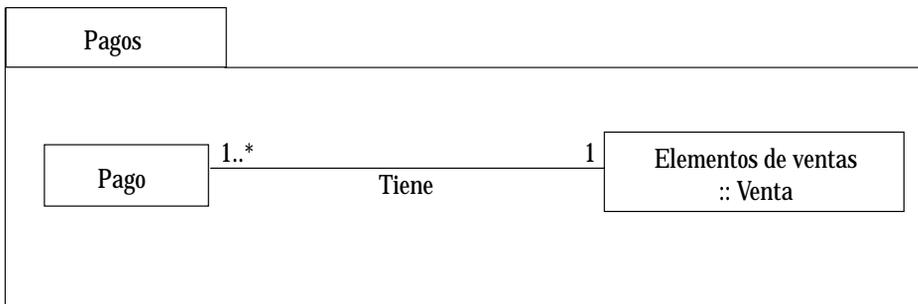
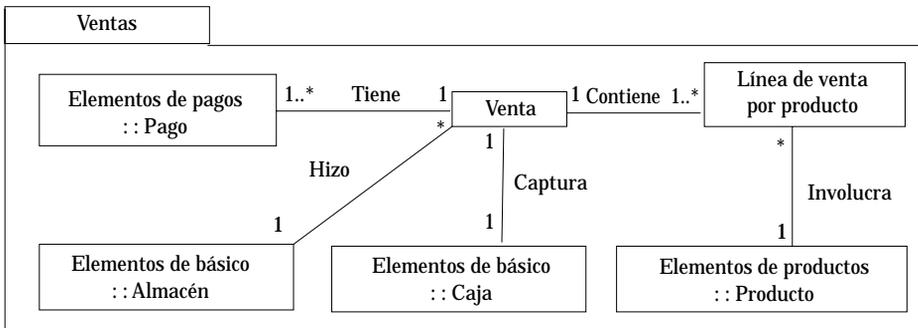
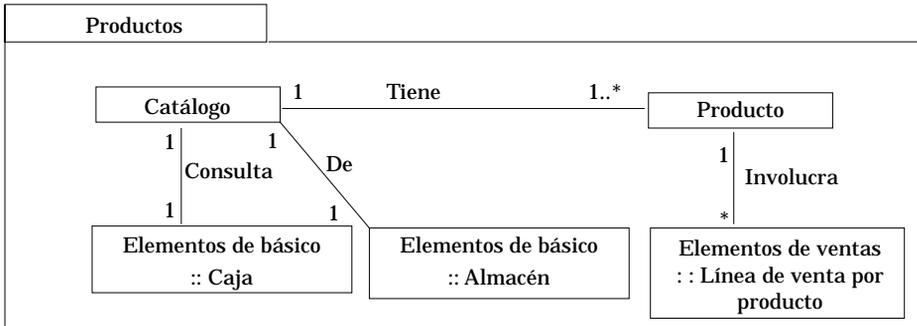
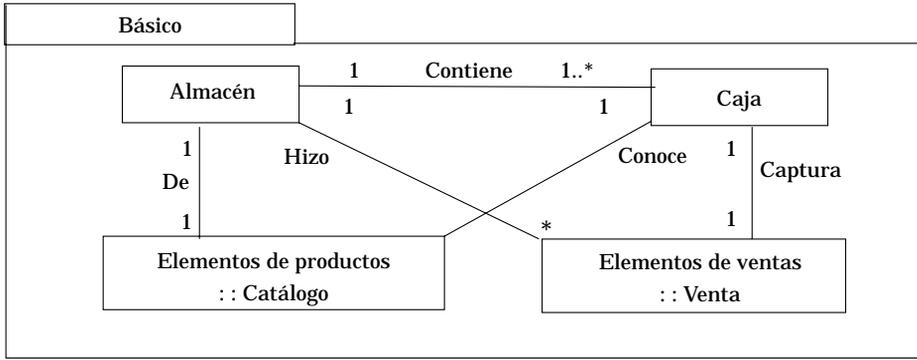
$I(P4) = \emptyset$, $O(P4) = \{ G \rightarrow V \}$.

La matriz de incidencia de $K\rho$ es:

MI	P1	P2	P3	P4
S1	1	1	1	0
S2	1	1	0	0
S3	1	1	0	0
S4	0	1	1	0
S5	1	0	1	0
S6	0	0	1	1

Acoplamiento (ρ) = 0.

En este ejemplo en particular los Módulos son Paquetes de Clases que en notación de UML quedarían:



BIBLIOGRAFÍA

1. Metrics for quality analysis and improvement of object-oriented software. Christof Ebert, Ivan Morschel. *Information and Software Technology*, vol. 39, No. 7, 1997, págs. 497-509.
2. UML y Patrones (Introducción al Análisis y Diseño Orientado a Objetos) Craig Larman, Prentice Hall, Edición en español, 1999.
3. A Metrics Suite for Object Oriented Design, Shyam R. Chidamber and Chris F. Kemerer. *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. 20 No. 6, June 1994, pág. 476-493.
4. An Ontological Model of an Information System, Yair Wand and Ron Weber. *IEEE Transactions on Software Engineering*, vol. 16, No. 11, November 1990.
5. El Lenguaje Unificado de Modelado, Grady Booch, James Rumbaugh, Ivar Jacobson, Addison-Wesley, Edición en español, 1999.
6. Elements of Algebraic Topology, James R. Munkres. Addison-Wesley, 1984.
7. From Cohomology in Physics to q-Connectivity in Social Science, R.H. Atkin. *Int.J.Man-Machine Studies* (1972) 4, 139-167.
8. Q-Analysis, or a Language of Structure: an Introduction for Social Scientists, Geographers and Planners. P.Gould, *Int.J.Man-Machine Studies* (1980) 13, 169-199.
9. Property-based Software Engineering Measurement. Lionel Briand, Sandro Morasca, Victor Basili. Technical Report CS-TR-3368, Universidad de Maryland.

CURRÍCULO

Luis Eduardo Múnera. Matemático de la Universidad del Valle, Máster y Doctor en Informática de la Universidad Politécnica de Madrid. Docente-Investigador de la Universidad Icesi de Cali. ☼

